arXiv:hep-ph/9603280 v2 13 Mar 96

INSTANTONEN IN DER QCD

Theorie und Anwendungen des Instanton-Flüssigkeit-Modells

Dissertation der Fakultät für Physik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von Marcus Hutter aus München
am 17.10.1995

1. Gutachter: Prof. H. Fritzsch
2. Gutachter: Prof. S. Theisen
Mündliche Prüfung: 9.2.1996

Zusammenfassung

Die heutige Theorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik (QCD) ist eine nicht-abelsche Eichtheorie, basierend auf der Eichgruppe SU(3). Trotz ihrer formalen Ähnlichkeit zur QED bestehen erhebliche Unterschiede. Schon 1973 konnte gezeigt werden, daß die Kopplungskonstante g für große Abstände wächst [61]. Dies stellte die Möglichkeit einer permanenten Einschließung von Quarks und Gluonen in Hadronen in Aussicht. Kurz darauf, im Jahre 1975, wurden nicht-triviale Lösungen der Euklidischen Yang-Mills Feldgleichungen gefunden, die heute BPST-Instantonen genannt werden [15] und erheblichen Einfluß auf die Struktur der QCD bei niedrigen Energien haben. Viele exakte Resultate für das ein-Instanton-Vakuum sind bekannt [11, 18], wobei ein phänomenologisch interessantes Resultat die explizite Brechung der axialen $U(1)$ Symmetrie ist [17]. Allerdings ist die 1-Instanton-Approximation, genau wie eine tree-level Berechnung in der Störungstheorie, nicht in der Lage, Bindungszustände oder spontane Symmetriebrechung zu beschreiben. Der nächte Schritt war die Untersuchung von exakten [16] und approximativen Multi-Instanton-Lösungen [14]. Es gibt zwei nützliche Bilder für diese Lösungen. In einem Bild werden Instantonen als Tunnelprozesse zwischen topologisch verschiedenen Vakua angesehen. Im anderen Bild beschreibt die Lösung ein Ensemble ausgedehnter (Pseudo-)Teilchen im 4-dimensionalen Raum.

In der gewöhnlichen Störungstheorie werden Fluktuationen um die triviale Null-Lösung berechnet. Die korrekte Quantisierungs-Vorschrift besteht darin, alle Lösungen der klassischen Feldgleichungen und deren Fluktuationen zu berücksichtigen. In der Pfadintegral-Darstellung der QCD ist die Zustandssumme somit durch Ensemble ausgedehnter Teilchen (Instantonen) im 4-dimensionalen Raum bei der Temperatur g^2 dominiert. Im einfachsten Fall beschreibt die Zustandssumme ein verdünntes ideales Gas unabhängiger Instantonen. Leider führt diese Annahme zu einer unendlichen Instanton-Dichte, hervorgerufen durch große Instantonen, was im krassen Widerspruch zur Annahme eines verdünnten Gases steht. Dieses Problem ist unter dem Namen Infrarot-Problem bekannt. Man vermeidet dieses Problem durch die Annahme einer repulsiven Wechselwirkung [24], die den Kollaps stabilisiert. Dies ist das Modell einer 4-dimensionalen Flüssigkeit. Unter bestimmten Voraussetzungen kann die Wechselwirkung durch eine effektive Dichte ersetzt werden. Das Instanton-Flüssigkeits-Modell im engeren Sinn beschreibt das QCD-Vakuum als Summe unabhängiger Instantonen mit Radius $\rho = (600\text{MeV})^{-1}$ und effektiver Dichte $n = (200\text{MeV})^4$. Ob dieses Modell korrekt ist, ist immer noch Gegenstand intensiver Untersuchungen. Bisher rechtfertigt im wesentlichen der phänomenologische Erfolg die Beschäftigung mit diesem Modell.

Durch numerische Simulation des Instanton-Flüssigkeit-Modells konnten eine Reihe hadronischer Größen bestimmt werden, insbesondere Meson-Massen, Baryon-Massen, Hadron-Wellenfunktionen und Kondensate [27, 28].

Zur Berechnung des Quark-Propagators und der Meson-Korrelatoren gibt es auch analytische Methoden. Die bedeutendsten Vorhersagen sind wohl die Brechung der chiralen Symmetrie (SBCS) im axialen Triplett-Kanal [25] und das Fehlen eines Goldstone Bosons im axialen Singulett-Kanal.

Der größte Teil dieser Arbeit ist der Erweiterung der analytischen Methoden und der (semi-)analytischen Auswertung der Ergebnisse gewidmet.

Die Meson-Korrelatoren (auch Polarisations-Funktionen genannt) werden im Instanton-Flüssigkeits-Modell in Nullmoden- und $1/N_c$-Approximation berechnet, wobei dynamische Quark-Schleifen berücksichtigt werden. Durch einen spektralen Fit werden die Massen der σ, ρ, ω, a_1 und f_1 Mesonen im chiralen Limes bestimmt. Eine gesonderte Betrachtung ermöglicht auch die Berechnung der η' Masse. Die Ergebnisse stimmen auf 10% Niveau mit den experimentellen Werten überein. Weiterhin wird versucht, die axialen Formfaktoren des Protons zu bestimmen. Diese stehen in Zusammenhang mit dem Proton-Spin(-Problem). Eine eichinvariante Gluon-Masse wird für kleine Impulse berechnet.

Die Arbeit wird abgeschlossen mit einigen Vorhersagen, die sich nicht speziell auf das Instanton-Flüssigkeits-Modell stützen. Im ein-Instanton-Vakuum wird ein eichinvarianter Quark-Propagator berechnet und mit dem regulären und dem singulären Propagator verglichen. Kriterien für die Wahl einer geeignete Eichung, insbesondere für die Wahl der singulären oder der regulären Eichung, werden gegeben. Eine endliche Relation zwischen dem Quark-Kondensat und der QCD-Skala Λ wird hergeleitet, wobei weder ein Infrarot-Cutoff noch ein spezifisches Instanton-Modell verwendet werden.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **7**
- 1.1 Ansätze zur Lösung der QCD 7
- 1.2 Inhaltsbeschreibung 10

2 Theorie der Instanton-Flüssigkeit **12**
- 2.1 Trennung Gaußscher von nicht-Gaußschen Fluktuationen * 12
- 2.2 Effektive QCD-Lagrangefunktion im Hintergrundfeld * 15
- 2.3 Der semiklassische Limes * 17
- 2.4 Instantonen in der QCD 18
- 2.5 Quarks 19
- 2.6 Das Instanton-Flüssigkeits-Modell 19

3 Der Propagator leichter Quarks **22**
- 3.1 Störungstheorie im Multi-Instanton Vakuum * 22
- 3.2 Exakte Streuamplitude im ein-Instanton Vakuum * 23
- 3.3 Nullmoden Approximation 24
- 3.4 Effektiver Vertex im Multi-Instanton-Vakuum * 24
- 3.5 Eine willkommene Auslöschung * 25
- 3.6 Renormierung der Instanton-Dichte * 26
- 3.7 Selbstkonsistenz-Gleichung für den Quark-Propagator * 27
- 3.8 Ein wenig Phänomenologie 28
- 3.9 $1/N_c$ Entwicklung * 30
- 3.10 Zusammenfassung 31

4 Vier-Punkt-Funktionen **32**
- 4.1 Einführung 32
- 4.2 $1/N_c$ Approximation * 33
- 4.3 Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung * 35
- 4.4 Triplett- und Singulett-Korrelator * 37
- 4.5 Zusammenfassung 38

5 Korrelatoren leichter Mesonen **39**
- 5.1 Analytische Ausdrücke 39
- 5.2 Analytische Ergebnisse 40
- 5.3 Spektral-Darstellung 41
- 5.4 Plot & Fit der Meson-Korrelatoren 44

6 Die axiale Anomalie **47**
6.1 Die Masse des η' Mesons . . . 47
6.2 Messung der axialen Formfaktoren . . . 51
6.3 Die axialen Singulett-Ströme und die Anomalie . . . 52
6.4 Der Proton-Spin und seine Interpretation . . . 53
6.5 Reduktion der Proton Formfaktoren zu Vakuum-Korrelatoren . . . 57
6.6 Axiale Formfaktoren $G^{GI}_{1/2}(q)$ . . . 58
6.7 Der Anomalie-Formfaktor $A(q)$ * . . . 59
6.8 Die Anomalie-Formfaktoren $K_{1/2}(q)$ . . . 61
6.9 Diskussion . . . 62

7 Gluon-Masse **64**
7.1 Einführung . . . 64
7.2 Der Gluon-Propagator * . . . 66
7.3 Der Propagator im statistischen Hintergrund * . . . 67
7.4 Eine naive Schätzung für die Gluon-Masse * . . . 68
7.5 Entwicklung in der Instanton-Dichte * . . . 69
7.6 QCD Propagatoren * . . . 70
7.7 Propagatoren für kleine Impulse * . . . 72
7.8 Nullmoden * . . . 73
7.9 Zusammenfassung & Ausblick . . . 74

8 Eichinvarianter Quarkpropagator **75**
8.1 Allgemeines über die Wahl einer geeigneten Eichung . . . 75
8.2 Eine natürliche Eichung . . . 76
8.3 Über die Wahl einer Eichung in der Instanton-Physik . . . 77
8.4 Der Quark-Propagator in axialer Eichung * . . . 77
8.5 Effektive Quark-Masse * . . . 80
8.6 Das Quark-Kondensat . . . 82
8.7 Zusammenfassung . . . 83

9 Schlußbetrachtung **84**
9.1 Neue Erkenntnisse . . . 84
9.2 Ausblick . . . 85
9.3 Danksagung . . . 85

A Anhang **87**
A.1 Notationen . . . 87
A.2 Instantonen in singulärer, regulärer und axialer Eichung . . . 88
A.3 Mittelung über die Instanton-Parameter γ_I . . . 89
A.4 Numerische Auswertung der Fourier- Transformation . . . 90
A.5 Numerische Auswertung der Faltungen . . . 91

B Abbildungen **92**
B.1 Panorama-Funktion . . . 92
B.2 Konstituenten-Quark-Masse in regulärer, singulärer und axialer Eichung . . . 92

B.3 Pseudoskalarer Triplett-Korrelator (π) 92
B.4 Pseudoskalarer Singulett-Korrelator (η') 92
B.5 Skalarer Triplett-Korrelator (δ) 92
B.6 Skalarer Singulett-Korrelator (σ) 92
B.7 Axialvektor-Korrelator (a_1, f_1) 92
B.8 Vektor-Korrelator (ρ, ω) 92

C Literatur **101**

Die mit * gekennzeichneten Kapitel sind eher technischer Natur.

Tabellenverzeichnis

3.1 Abhängigkeit verschiedener Größen von den Parametern des Instanton-Flüssigkeit-Modells n_R, ρ, N_c 31

5.1 Chirale Symmetrie-Brechung und Supraleitung 42
5.2 Meson-Korrelatoren — Notation 44
5.3 Meson-Massen 46

6.1 Proton Formfaktoren bei Impulsübertrag Null 57

A.1 Asymptotik von $\varphi(p)$ 89

Kapitel 1

Einführung

Die Theorien zur Beschreibung der vier fundamentalen Kräfte in der Physik – Gravitation, elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung – sind allesamt Eichtheorien. In quantisierter Form werden die Kräfte zwischen den verschiedenen Teilchen (Fermionen) durch Eich-Bosonen vermittelt. Die QCD ist die Theorie der starken Wechselwirkung zwischen Quarks und Gluonen. Sie ist eine SU(3) Eichtheorie mit der Lagrangefunktion[1]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4g^2} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a + \sum_{l=1}^{N_f} \bar{\psi}_l (i \not{D} + i m_l) \psi_l \quad . \tag{1.1}$$

Berücksichtigt man nur die leichten Quarks u, d und manchmal s und setzt man deren Masse auf Null, so erhält man eine Theorie mit nur einem Parameter, der Eichkopplung g, die jedoch aufgrund dimensionaler Transmutation kein freier Parameter ist. Trotz der Tatsache, daß die Struktur der QCD einfach ist (z.B. verglichen mit der elektroschwachen Wechselwirkung), ist es wegen nicht-störungstheoretischer Effekte extrem schwierig, diese Theorie zu lösen.

1.1 Ansätze zur Lösung der QCD

Um die Rolle der Instantonen in der QCD einzuordnen, möchte ich zunächst eine Reihe wichtiger Methoden zur Lösung der QCD erwähnen, beginnend mit Methoden, die allgemein in der Quantenfeldtheorie (QFT) Anwendung finden, und endend mit spezifischeren Ansätzen:

- *Axiomatische Feldtheorie:* Wightman/Oswalder&Schrader haben eine Reihe von Minkowskischen/Euklidischen Axiomen für Vakuum-Korrelatoren angegeben, die

[1] In dieser Arbeit wird durchgehend die Euklidische Formulierung der QCD verwendet. Dies ist die Quelle einiger ungewohnter Faktoren i oder Minuszeichen. Ursache des $1/g^2$ Vorfaktors ist ein Skalieren der Eichfelder mit g.

jede QFT respektieren sollte (Analytizität, Regularität, Lorentzinvarianz, Lokalität, ...). Es ist klar, daß die aus diesen Axiomen abgeleiteten Theoreme von sehr allgemeiner Natur sein müssen (z.B. CPT-Invarianz), da von keiner konkreten Lagrangefunktion ausgegangen wird [2].

- *Haag-Ruelle/LSZ Theorie:* S-Matrix-Elemente stehen in 1:1 Beziehung zu Vakuum-Korrelatoren [3]. Die S-Matrix ist das zentrale Objekt der Teilchen-Phänomenologie und enthält wichtige Information wie Streuquerschnitte, Form-Faktoren, Strukturfunktionen, u.s.w. Theoretischen Studien sind meist die Vakuum-Korrelatoren zugänglicher. Die Notwendigkeit der expliziten Konstruktion des Hilbert-Raumes wird hier vermieden, was eine extrem schwierige Aufgabe ist, geht man über die Störungstheorie hinaus.

- *Quantisierung:* Man mag an dieser Stelle einwenden, daß 'Quantisierung' nicht in einer Liste von Methoden zur Lösung von QFT auftauchen sollte, da es eine Methode ist, eine QFT zu erhalten bzw. zu definieren. Auf der anderen Seite gibt es neben der kanonischen Quantisierung andere Möglichkeiten eine Theorie zu quantisieren. Die populärste ist die Pfad-Integral-Quantisierung [8]. Üblicherweise wird diese in Lehrbüchern zur Teilchenphysik nur als Abkürzung benutzt, um bestimmte Theoreme schneller herleiten zu können. Geht man über die Störungstheorie hinaus, so führen die verschiedenen Quantisierungs-Vorschriften häufig zu unterschiedlichen physikalischen und mathematischen Einsichten und zu unterschiedlichen Methoden, die Theorie zu lösen. Varianten der Pfadintegral-Quantisierung sind die in Gitter-Eichtheorien verwendete Random-Walk-Quantisierung und die stochastische Quantisierung.

- *(Gebrochene) Symmetrie:* Jeder Freiheitsgrad wie Spin, Flavor und Farbe ist möglicher Ursprung einer (approximativen) Symmetrie, wie $SU(2N_f)$ nebst Untergruppen hiervon und $SU(3)$ Eichinvarianz. Erhaltene Ströme und Ward-Identitäten [4] sind die Konsequenz. Im Falle leichter Quarks gibt es darüberhinaus eine approximative chirale Symmetrie, die zu PCAC, axialen Ward-Identitäten, Stromalgebra-Theoremen, Soft-Pion Physik, etc. führt. Weiterhin besitzt die QCD mit masselosen Quarks eine anomal gebrochene Skaleninvarianz, die Ausgangspunkt der Renormierungs-Gruppen-Techniken ist [5].

- *Störungstheorie:* Aufgrund der asymptotischen Freiheit der QCD ist die Kopplung g für große Energien klein und die Störungstheorie in g ist anwendbar. Die QCD kann also für Prozesse, in denen nur Impulse von, sagen wir, mehr als 1 GeV beteiligt sind, gelöst werden. Das Verhalten von Korrelatoren für kleine Abstände ist daher berechenbar ($x \leq 0.2$ fm).

- *Operator-Produkt-Entwicklung (OPE):* Eine Erweiterung der Störungstheorie kann durch Separation der physikalischen Effekte bei kleinen Abständen von den Effekten bei großen Abständen erreicht werden. Erstere sind in den sog. Wilson-Koeffizienten enthalten, die störungstheoretisch berechnet werden können. Letztere nicht-perturbative Effekte sind in wenigen Vakuum- oder Hadron-Erwartungswerten

lokaler Operatoren enthalten, die phänomenologisch oder Mithilfe von Modellannahmen bestimmt werden müssen [57]. Vakuum-Korrelatoren kann man auf diese Weise bis zu Abständen von $x \leq 0.3 \ldots 0.5$ fm bestimmen.

- *QCD Summen-Regeln:* QCD-Summenregeln werden in vielfältiger Weise zur Bestimmung von Hadron-Massen und -Kopplungen eingesetzt. Die allgemeine Methode ist, die Existenz bestimmter Hadronen anzunehmen und einen Resonanz+Kontinuum-Ansatz im Minkowski-Raum zu machen. Der Euklidische Korrelator wird theoretisch vorhergesagt (OPE, Gitter-Theorie, Instantonen). Mittels Dispersionsrelationen kann man den Ansatz in einem bestimmten Euklidischen Fenster durch Anpassen der Hadron-Parameter an den theoretischen Korrelator angleichen, und erhält so eine Vorhersage für diese [57].

- *Effektive Theorien:* Man kann effektive Lagrange-Funktionen konstruieren, die Mesonen und/oder Baryonen als fundamentale Felder enthalten, und mehr oder weniger durch die QCD oder historisch motiviert sind oder aus anderen physikalischen Gebieten übertragen wurden. Die Parameter werden experimentell bestimmt oder, soweit möglich, aus der QCD berechnet.

Eine Reihe von Phänomenen sind mit den oben aufgelisteten Methoden qualitativ erklärt und quantitativ berechnet worden, aber das Verhalten der QCD bei großen Abständen ist weiterhin ungelöst. Es gibt mindestens zwei Probleme, die in diesen Bereich fallen: Chirale Symmetrie-Brechung und Confinement. Bis heute wird die Brechung der chiralen Symmetrie *angenommen* und die Konsequenzen, wie Goldstone-Bosonen, werden unter dieser Annahme diskutiert. In der OPE verwendet man die aus dem Experiment bestimmten von Null verschiedenen Werte für das Quark- und für andere Kondensate, hat aber keine Möglichkeit jene vorauszusagen. Das Quark-Kondensat ist der Ordnungsparameter der chiralen Symmetrie und ein nicht-verschwindender Wert zeigt die spontane Brechung der chiralen Symmetrie (SBCS) an. Die Einschließung von Quarks und Gluonen zu Farb-Singulett-Zuständen (Confinement) muß auch angenommen werden.

Ansätze zur Lösung dieser Probleme sind:

- *Gitter-QCD:* Im Prinzip ist die Methode sehr einfach. Das Kontinuum wird durch ein feines Gitter ersetzt, das ein großes aber endliches Volumen überdeckt. Das Pfadintegral ist so durch eine große, aber endliche Anzahl von Integralen ersetzt, die numerisch ausgewertet werden. Alle Vakuum-Korrelatoren können für beliebige Euklidische Abstände berechnet werden. Auf diese Weise hat man Confinement und SBCS gezeigt und einige Hadron-Parameter bestimmt. In der Praxis sind Gitter-Rechnungen jedoch problematischer als der erste Eindruck, den diese skizzenhafte Beschreibung vielleicht zurückläßt [9].

- *Instantonen:* Wie in der Gitter-QCD versucht man das Euklidische Pfad-Integral auszuwerten, aber nun in semiklassischer Approximation. Zusätzlich zum globalen Minimum $A^a_\mu = 0$ der QCD-Wirkung, um das in der gewöhnlichen Störungstheorie

entwickelt wird, gibt es viele andere lokale Minima, die Instantonen genannt werden, und berücksichtigt werden müssen [11, 15, 16]. Im Quark-Sektor erzeugt dies eine effektive Wechselwirkung zwischen den $2N_f$ leichten Quarks, die für die SBCS verantwortlich ist [17]. Obwohl Confinement nicht erklärt werden kann, können dennoch viele Hadron-Parameter berechnet werden [26, 27, 28], was die Vermutung nahelegt, daß Confinement keine so große Rolle für eine Reihe von Eigenschaften der Hadronen spielt.

Oft erlaubt erst die Kombination der Resultate der verschiedenen Ansätze Kontakt zur Phänomenologie.

1.2 Inhaltsbeschreibung

In dieser Arbeit werden die Implikationen der Instantonen auf die Hadron-Eigenschaften quantitativ und systematisch studiert. Als elementare Einführung in die klassische und semiklassische Theorie von Solitonen und Instantonen kann [11] uneingeschränkt empfohlen werden.

Kapitel 2 gibt eine Einführung in die semiklassische Berechnung nicht-trivialer Integrale. Der allgemeine Formalismus wird für endlich-dimensionale Integrale entwickelt und anschließend auf die QCD-Zustandssumme übertragen. Weiterhin wird das Instanton-Flüssigkeits-Modell eingeführt.

In *Kapitel 3* wird der Propagator eines leichten Quarks berechnet. Alle nötigen Approximationen werden explizit erwähnt und diskutiert. Dynamische Quark-Schleifen renormieren die Instanton-Dichte, welche mit dem Gluon-Kondensat identifiziert werden kann. Es wird gezeigt, daß für ein Quark-Flavor die $1/N_c$ Entwicklung exakt ist. Die Konstituenten-Quarkmasse und das Quark-Kondensat werden für das u, d und s Quark berechnet.

Die gleichen Approximationen werden in *Kapitel 4* benutzt, um die 4-Punkt-Funktionen zu berechnen. Besondere Aufmerksamkeit gilt dem Singulett-Korrelator, zu dem eine Kette von Quark-Schleifen beiträgt, die im $N_c \to \infty$ Limes *nicht* unterdrückt ist. Mit ein und derselben Approximation erhalten wir Goldstone-Bosonen im pseudoskalaren Triplett-Korrelator, aber kein masseloses Singulett-Boson.

In *Kapitel 5* werden die Meson-Korrelatoren diskutiert. Die Verwendung eines Spektral-Ansatzes ermöglicht die Bestimmung einiger Meson-Massen und -Kopplungen. Diese werden mit den Werten aus numerischen Studien der Instanton-Flüssigkeit [28] und den experimentellen Daten verglichen.

Kapitel 6 beschäftigt sich mit der axialen Anomalie. Die interessantesten Größen im axialen Singulett-Kanal sind die Masse des η' Mesons und der Spin des Protons. Durch Kombination der axialen Anomalie und der Skalen-Anomalie mit Ideen aus der Instanton-Physik kann $m_{\eta'}$ auf 10% genau vorhergesagt werden. Der Schwerpunkt liegt in der Diskussion des Proton-Spins und dessen Berechnung im Instanton-Flüssigkeit-Modells.

In *Kapitel 7* wird der Geist- und der Gluon-Propagator im Instanton-Flüssigkeits-Modell berechnet. Für kleine Impulse ergibt sich eine Geist-Masse von 340 MeV und eine Gluon-Masse von 480 MeV. Die Massen sind unabhängig vom Eichparameter ξ.

Kapitel 8 enthält den Versuch, einige Vorhersagen zu machen, ohne sich auf das Instanton-Flüssigkeits-Modell zu stützen. In regulärer Eichung ist es möglich eine endliche Relation zwischen dem Quark-Kondensat und der QCD-Skala Λ zu erhalten. Da die Endlichkeit wesentlich von der Wahl der Eichung abhängt, wird mit einer ausführlichen Diskussion einer Eichwahl und der Berechnung eines eichinvarianten Propagators begonnen.

Eine Zusammenfassung der in dieser Arbeit neu gewonnenen Erkenntnisse findet sich in *Kapitel 9*. Daran anschließend sind offene Fragen zusammengestellt, die eine weitergehende Untersuchung verdienen. Die *Anhänge* enthalten eine Liste verwendeter Notationen und die explizite Gestalt eines Instantons und dessen Dirac-Nullmode in singulärer, regulärer und axialer Eichung. Weiterhin werden Verfahren zur numerischen Berechnung von Fouriertransformationen und Faltungen Lorentz-kovarianter Funktionen beschrieben.

Alle *Abbildungen* befinden sich am Ende der Arbeit vor dem nach Sachgebieten geordneten *Literaturverzeichnis*.

Die einzelnen Kapitel können unabhängig voneinander gelesen werden. Die mit $*$ gekennzeichneten Abschnitte sind eher technischer Natur.

Kapitel 2

Theorie der Instanton-Flüssigkeit

Dieses Kapitel stellt eine Einführung in die semiklassische Berechnung der QCD Zustandssumme dar. Hierzu werden die Fluktuationen um Lösungen der klassischen Euklidischen Bewegungsgleichungen in (approximativ) Gaußsche und kollektive Koordinaten zerlegt (Abschnitt 2.2). In Abschnitt 2.3 werden die (approximativ) Gaußschen Freiheitsgrade in semiklassischer Approximation ausintegriert. Die klassischen Lösungen der Yang-Mills-Gleichungen können nach ihrer Topologie $N \in \mathbb{Z}$ klassifiziert werden und werden Multi-Instanton-Lösungen genannt. Auf eine Einführung in die mathematisch sehr schöne klassische Theorie von Instantonen [16] wird in dieser Arbeit verzichtet. Eine elementare Einführung in die klassische und semiklassische Theorie von Solitonen und Instantonen verschiedenster QFT findet man in [11]. Die klassische ein-Instanton-Lösung und die zugehörige semiklassische Zustandssumme werden in Abschnitt 2.4 angegeben. Die Multi-Instanton-Lösungen können im Falle wohlseparierter Instantonen auf den Fall eines Instantons zurückgeführt werden. In Abschnitt 2.5 wird beschrieben wie Quarks die Zustandssumme modifizieren. In Abschnitt 2.6 wird das Infrarot-Problem diskutiert und das Instanton-Flüssigkeits-Modell zur "Lösung" dieses Problems vorgestellt. Den Kapiteln 3-7 liegt dieses Modell zugrunde.

2.1 Trennung Gaußscher von nicht-Gaußschen Fluktuationen *

Die QCD oder jede andere QFT in der Pfadintegral-Formulierung zu lösen, ist äquivalent zur Berechnung der Zustandssumme Z mit externem Quellterm. Dies ist keine einfache Aufgabe, da man eine unendliche Zahl von Freiheitsgraden zu behandeln hat. Eine Art, dieses Problem zu meistern, ist, die Anzahl der Freiheitsgrade durch semiklassische Ausintegration der (approximativ) Gaußschen Freiheitsgrade zu reduzieren. Übrig bleiben die nicht-Gaußschen Freiheitsgrade, kollektive Koordinaten genannt, die mit anderen Methoden behandelt werden müssen.

Ich möchte mit einer allgemeinen Beschreibung der Separation Gaußscher von kollektiven Koordinaten beginnen, ohne mich auf eine QFT zu beziehen. Ziel ist es,

$$Z = \int d^n x \, e^{-S[x]} \tag{2.1}$$

zu berechnen, wobei S eine reellwertige Funktion ist, die von einem n dimensionalen Vektor $x \in I\!R^n$ abhängt. Das Integral sei dominiert durch Werte von x, die in einer Umgebung einer k-dimensionalen Unter-Mannigfaltigkeit des $I\!R^n$ liegen, welche durch $x = f(\gamma)$, $\gamma \in I\!R^k$ parametrisiert sei. Vektoren im Tangentialraum von $f(\gamma)$ werden Nullmoden genannt, da $S[x(\gamma)]$ in dieser Richtung (nahezu) konstant ist. Üblicherweise beschreibt $f(\gamma)$ degenerierte oder approximative Minima von S. Weiterhin stört es nicht, falls $f(\gamma)$ Punkte enthält, die nur wenig zum Integral beitragen – dies verursacht keinerlei Fehler – aber $f(\gamma)$ darf keine wichtigen Punkte auslassen. In Abbildung B.1 ist ein zwei-dimensionales Beispiel mit einem Fluß (ein-dimensionale Mannigfaltigkeit) mit steilen Flußufern und hohen Bergen zu seinen Seiten zu sehen. Das Integral wird von der gestrichelten Fläche dominiert. Diese Fläche kann wie folgt parametrisiert werden:

$$x = f(\gamma) + y \quad , \quad x, y \in I\!R^n \quad , \quad \gamma \in I\!R^k \quad . \tag{2.2}$$

Um diese Parametrisierung eindeutig zu machen, müssen wir k lineare Zusatz-Bedingungen an y stellen:

$$y \cdot g_i(\gamma) = c_i \quad , \quad 1 \le i \le k \tag{2.3}$$

Beispielsweise bewirkt $c_i = 0$ und $g_i(\gamma) = \partial f(\gamma)/\partial\gamma_i$, eine Beschränkung von y senkrecht zum "Fluß": Es verbietet Fluktuationen in die nicht-Gaußschen Nullmoden-Richtungen. Jeder Punkt x wird jetzt (zumindest in der Umgebung des Flusses) eindeutig durch ein y, das der Nebenbedingung (2.3) genügt, und durch ein γ mittels (2.2) parametrisiert. Nun muß nur noch Z durch den Fluktuations-Vektor y und die kollektiven Koordinaten γ ausgedrückt werden. Eine elegante Möglichkeit besteht darin, eine Faddeev-Popov-Eins einzuführen,

$$1 = \int d^k\gamma \, d^n y \, \delta^k\big(y \cdot g_i(\gamma) - c_i\big) \, \delta^n\big(f(\gamma) + y - x\big) \, \Phi(x) \tag{2.4}$$

die als Definition von Φ zu verstehen ist. Fügt man diesen Ausdruck in (2.1) ein und integriert über x, so erhält man:

$$Z = \int d^k\gamma \, d^n y \, \delta^k(y \cdot g_i(\gamma) - c_i) \, \Phi(f(\gamma) + y) \, e^{-S[f(\gamma)+y]} \quad . \tag{2.5}$$

Die Ausführung der y-Integration in (2.4) ist trivial:

$$\Phi^{-1}(x) = \int d^k\gamma' \, \delta^k\big((x - f(\gamma'))g_i(\gamma') - c_i\big) \quad . \tag{2.6}$$

Für $x = f(\gamma) + y$ trägt die δ-Funktion im Integral nur für $\gamma' = \gamma$ bei. Daher dürfen wir das δ-Argument in $\gamma' - \gamma$ linearisieren

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(f(\gamma) + y) &= \int d^k\gamma' \delta^k \left(\sum_j (y \cdot \tfrac{\partial g_i(\gamma)}{\partial\gamma_j} - g_i(\gamma) \cdot \tfrac{\partial f(\gamma)}{\partial\gamma_j})(\gamma'_j - \gamma_j) \right) \\ &= \left| \det_{ij} \left(y \cdot \partial_j g_i - g_i \cdot \partial_j f \right) \right|^{-1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\text{mit} \quad y \cdot g_i(\gamma) = c_i \quad .$$

Für eine differenzierbare und bijektive Abbildung ist das Vorzeichen der Determinante konstant und kann positiv gewählt werden. Ist die Abbildung nicht bijektiv, so werden Bereiche des $\mathbb{R}^n$ doppelt gezählt, andere wiederum ausgelassen. In der QFT ist dieses Phänomen unter dem Begriff 'Gribov-Mehrdeutigkeit' [59] oder 'Double-Counting' bekannt. Wir wollen Bijektivität lokal in einer Umgebung der durch $f(\gamma)$ beschriebenen Mannigfaltigkeit voraussetzen. Da es in der semiklassischen Approximation nur auf diese Umgebung ankommt, spielt eine mögliche Mehrdeutigkeit außerhalb einer kleinen Umgebung der Mannigfaltigkeit keine Rolle und die Betragstriche in (2.7) können weggelassen werden.

Durch Einsetzen von Φ in (2.5) erhalten wir

$$Z = \int d^k\gamma \, d^n y \, \delta^k(y \cdot g_i(\gamma) - c_i) \det{}_{ij} \left(y \cdot \partial_j g_i(\gamma) - g_i(\gamma) \cdot \partial_j f(\gamma) \right) e^{-S[f(\gamma)+y]} \quad . \tag{2.8}$$

Z kann noch in eine für die semiklassische Approximation geeignetere Form gebracht werden, die auch die Analogie zur QFT mehr hervorhebt. Z ist von c_i unabhängig und daher ist auch die rechte Seite von (2.8) unabhängig von c_i, obwohl c_i explizit erscheint. Durch Multiplikation mit

$$1 = (2\pi\xi)^{-k/2} \int d^k c \, e^{-\frac{1}{2\xi}\sum_i c_i^2} \tag{2.9}$$

kann die δ-Funktion geglättet werden. Die Determinante kann in der Form

$$\det A = \int d\eta \, d\bar{\eta} \, e^{\bar{\eta} A \eta} \tag{2.10}$$

geschrieben werden, wobei η antikommutierende Grassmann Variablen (Geister) sind. Durch Einfügen von (2.9) und (2.10) in (2.8) und Ausführen der c-Integration erhält man folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} Z &= (2\pi\xi)^{-k/2} \int d^k\gamma \, d^n y \, d\eta \, d\bar{\eta} \, e^{-S[f(\gamma)+y] - S_{gf}[y,\gamma] + S_{FPG}[y,\gamma,\eta,\bar{\eta}]} \quad , \\ S_{gf} &= \frac{1}{2\xi} y^T \left(\sum_i g_i(\gamma) g_i^T(\gamma) \right) y \quad , \\ S_{FPG} &= \sum_{ij} \bar{\eta}_i \left(y \cdot \partial_j g_i(\gamma) - g_i(\gamma) \cdot \partial_j f(\gamma) \right) \eta_j \quad . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Für eine global bijektive Transformation ist diese Darstellung der Zustandssumme Z immer noch exakt, für eine lokal bijektive Transformation ist sie exakt in jeder Ordnung Störungstheorie, insbesondere in semiklassischer Approximation. An dieser Stelle könnten nun die (approximativ) Gaußschen Freiheitsgrade y, η und $\bar{\eta}$ in semiklassischer Approximation ausintegriert werden. Die Zustandssumme ist dann nur noch ein Integral über die kollektiven Koordinaten. In Abschnitt 2.3 wird dies direkt für die QCD durchgeführt.

2.2 Effektive QCD-Lagrangefunktion im Hintergrundfeld *

Wir betrachten nun den Fall der QCD:

$$Z = \int DA_\mu \, e^{-S_{YM}[A]} \quad , \quad S_{YM}[A] = \int d^4x \, \frac{1}{4g^2} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a(x) \tag{2.12}$$

Die Hintergrund-Konfigurationen, die S_{YM} approximativ minimieren, werden mit $\bar{A}_\mu(\gamma)$ bezeichnet. Ein allgemeines Eichfeld kann in der Form

$$A_\mu = (\bar{A}_\mu(\gamma) + B_\mu)^\Omega \quad , \quad \gamma \in I\!R^k \tag{2.13}$$

geschrieben werden, wobei B_μ Fluktuationen um den Hintergrund beschreiben und A^Ω_μ ein eichtransformiertes Feld ist

$$A^\Omega_\mu = S A_\mu S^\dagger + i S \partial_\mu S^\dagger \quad , \quad S = e^{i\Omega} \in SU(N_c) \quad . \tag{2.14}$$

Wie im endlich-dimensionalen Fall müssen wir diese Darstellung durch zusätzliche Bedingungen eindeutig machen. Wir fordern

$$D_\mu(\bar{A}) B_\mu(x) = C(x) \quad , \tag{2.15}$$

um die Eichfluktuationen zu fixieren und

$$\int d^4x \, \psi^i_\mu(x;\gamma) B_\mu(x) = c_i \quad , \quad 1 \le i \le k \tag{2.16}$$

um Fluktuationen in Nullmoden-Richtungen zu vermeiden. Die Herleitung einer effektiven Wirkung ähnlich (2.11) erfolgt vollkommen analog zum vorherigen Fall, nur daß die Notation jetzt etwas komplizierter ist. Es gibt die folgende Korrespondenz:

$$\begin{array}{rcccccc} \text{endlich-dimensionales Beispiel} & : & i & x & y & \gamma_i & g_i \\ \text{QCD} & : & i,x & A & B & \gamma_i, \Omega(x) & \psi^i_\mu \end{array} \tag{2.17}$$

Die Faddeev-Popov Eins hat die Form

$$1 = \int d^k\gamma \, D\Omega \, DB_\mu \, \delta\big(D_\mu(\bar{A}) B_\mu\big) \delta^k\Big(\int \psi^i_\mu B_\mu d^4x \Big) \delta\big((\bar{A}_\mu + B_\mu)^\Omega - A_\mu\big) \Phi[A_\mu] \quad . \tag{2.18}$$

Die einzelnen Schritte, um einen expliziten Ausdruck für Φ zu erhalten sind folgende:

Versehe γ, Ω und B mit Strichen, setze $A = \bar{A} + B$ ein, linearisiere das letzte δ-Argument um $B'_\mu = B_\mu$, führe die funktionale B'_μ Integration durch und linearisiere die übrigen δ-Argumente um $\gamma' = \gamma$ und $\Omega' = 0$. Ohne die Details der Rechnung hier zu präsentieren, erhält man [25]

$$\Phi^{-1}(\bar{A}(\gamma) + B) = \int d^k\gamma' \, D\Omega' \delta^k(X_i) \, \delta(Y) \quad , \tag{2.19}$$

$$X_i = \int d^4x \sum_j \left(\psi^i_\mu(\gamma) \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} - \frac{\partial \psi^i_\mu(\gamma)}{\partial \gamma_j} B_\mu \right) (\gamma'_j - \gamma_j) + \psi^i_\mu D_\mu(\bar{A}+B)\Omega' \quad , \tag{2.20}$$

$$Y = \sum_j D_\mu(\bar{A}+B) \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} (\gamma'_j - \gamma_j) + D_\mu(\bar{A}) D_\mu(\bar{A}+B)\Omega' \quad . \tag{2.21}$$

Aus (2.15), (2.16), (2.20) und (2.21) kann man die Zustandssumme Z ohne weitere Rechnung ablesen:

$$Z = N(\xi) \int d^k\gamma \; DB_\mu \; D\eta \; D\bar{\eta} \delta^k \Big(\int \psi^i_\mu B_\mu d^4x \Big) e^{-S_{QCD}[\bar{A},B,\eta,\bar{\eta}]} \quad , \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
S_{QCD} &= S_{YM}[\bar{A}+B] - S_{gf}[\bar{A},B] + S_{FPG}[\bar{A},B,\eta,\bar{\eta}] \quad , \\
S_{YM} &= \int d^4x \frac{1}{4g^2} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a (\bar{A}+B) \quad , \\
S_{gf} &= \frac{1}{2\xi} \int d^4x \, (D_\mu(\bar{A}) B_\mu)^2 \quad , \\
S_{FPG} &= \sum_{ij} \bar{\eta}_i \left[\int d^4x \, \psi^i_\mu(\gamma) \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} - \frac{\partial \psi^i_\mu(\gamma)}{\partial \gamma_j} B_\mu \right] \eta_j \\
&+ \sum_i \int d^4x \, \bar{\eta}_i \psi^i_\mu D_\mu(\bar{A}+B)\eta(x) + \int d^4x \sum_j \bar{\eta}(x) D_\mu(\bar{A}+B) \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} \\
&+ \int d^4x \, \bar{\eta}(x) D_\mu(\bar{A}) D_\mu(\bar{A}+B)\eta(x) \quad .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

S_{QCD} ist unabhängig vom Eichparameter Ω. Aus diesem Grund konnte die Ω-Integration in die Definition des Normierungsfaktors $N(\xi)$ absorbiert werden. $\eta(x)$ sind die gewöhnlichen Geist-Felder, deren Ursprung die Eichfixierung ist. Für jede weitere Bedingung (2.16) erhält man zusätzliche Geist-Variablen η_i. Für $\bar{A} = 0$ und keine zusätzliche Bedingung ($k = 0$) reduziert sich die obige Wirkung auf die Standard QCD-Wirkung inklusive Faddeev-Popov-Geistern in R_ξ Eichung

$$S_{gf} = \frac{1}{2\xi} \int d^4x \, (\partial_\mu B_\mu)^2 \quad , \quad S_{FPG} = \int d^4x \, \bar{\eta}(x) \partial_\mu D_\mu(B) \eta(x) \quad . \tag{2.24}$$

Man beachte, daß die Wirkung (2.22) immer noch exakt ist, wobei die nicht-harmonischen Freiheitsgrade γ_i nun von den hoffentlich mehr Gaußschen B_μ und η getrennt sind.

Für kleine Kopplung g ist es nun möglich, Feynman-Regeln aus (2.23) in Analogie zu dem Fall ohne Hintergrund abzulesen. Dazu ist es nötig den "freien" Gluon-, Geist- und Quark-Propagator zu gegebenen Hintergrund $\bar{A}$ zu berechnen. Falls $\bar{A}$ ein nichtkonstantes Feld ist, ist selbst das eine sehr komplizierte Aufgabe, im Gegensatz zur gewöhnlichen Störungstheorie um $\bar{A} = 0$. Für exakte Multi-Instanton-Konfigurationen wurden explizite Ausdrücke für den Gluon- und Geist-Propagator in [18] hergeleitet.

2.3 Der semiklassische Limes *

Anstatt eine formale Störungstheorie in beliebiger Ordnung zu entwickeln, die aufgrund der Komplexität der Formeln praktisch unbrauchbar ist, ist es ratsam, sich auf den semiklassischen Limes zu beschränken, in dem man nur Terme, die höchstens quadratisch in den Feldern sind, berücksichtigt. In der QCD (und vielen anderen Feldtheorien) ist dies äquivalent zur Störungstheorie in niedrigster Ordnung, allerdings um einen nicht-trivialen Hintergrund!

Bis jetzt haben wir ψ_μ^i noch nicht näher spezifiziert. Eine natürliche Wahl wäre $\psi_\mu^i = \partial \bar{A}_\mu / \partial \gamma_i$, um die Fluktuationen orthogonal zu den Nullmoden zu fixieren. Etwas praktischer ist es ψ_μ^i in die sogenannte Hintergrundeichung zu transformieren:

$$\psi_\mu^i = \left(\frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} \right)^\Omega \quad \text{mit } \Omega \text{ so, daß} \quad D_\mu(\bar{A}) \psi_\mu^i = 0 \quad . \tag{2.25}$$

Weiterhin wollen wir annehmen, daß $\bar{A}$ die Eich-Wirkung S_{YM} minimiert, d.h. wir vernachlässigen die linearen Terme in S_{QCD}. Für wohlseparierte Instantonen ist diese Annahme erfüllt.

Die quadratischen Terme haben folgende explizite Gestalt:

$$\begin{aligned} S_{QCD} &= S_{YM}[\bar{A}] + \int d^4x \, \frac{1}{2g^2} B_\mu K_{\mu\nu}(\bar{A}) B_\nu + \int d^4x \, \bar{\eta}(x) D^2(\bar{A}) \eta(x) \\ &+ \sum_{ij} \bar{\eta}_i \psi_\mu^i \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} \eta_j + \int d^4x \sum_j \bar{\eta}(x) D_\mu(\bar{A}) \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} \eta_j + O(\text{Feld}^3) \quad , \end{aligned} \tag{2.26}$$

$$K_{\mu\nu} = -D^2 \delta_{\mu\nu} + 2iG_{\mu\nu} + (1 - \frac{1}{\xi}) D_\mu D_\nu \quad , \quad G_{\mu\nu} = F^c G^c_{\mu\nu} \quad , \quad (F^c)_{ab} = i f_{acb} \quad . \tag{2.27}$$

Führt man die Gaußschen Integrale über die Eichfelder und die Geister aus, so erhält man eine effektive Wirkung, die nur noch von den kollektiven Koordinaten γ_i abhängt:

$$Z = \int d^k\gamma \, e^{-S_{eff}[\gamma]} \tag{2.28}$$

$$e^{-S_{eff}[\gamma]} = \det_{ij} \left(\psi_\mu^i(\gamma) \frac{\partial \bar{A}_\mu}{\partial \gamma_j} \right) \frac{\text{Det}(-D^2(\bar{A}))}{(\text{Det}' K'_{\mu\nu}(\bar{A}))^{1/2}} e^{-S_{YM}[\bar{A}]} \tag{2.29}$$

Die δ-Funktion in (2.22) beschränkt die Eichfeld-Fluktuationen auf den Raum senkrecht zu ψ_μ^i. $K'_{\mu\nu}$ ist definiert als die Projektion von $K_{\mu\nu}$ auf den Raum orthogonal zu ψ_μ^i. Det$'$ ist das Produkt aller Eigenwerte von $K'_{\mu\nu}$, ohne die k Nullmoden, die bei der Projektion entstanden sind.

2.4 Instantonen in der QCD

Die Lösungen der klassischen Euklidischen Yang-Mills Bewegungsgleichungen können nach ihrer Topologie $N \in \mathbb{Z}$ klassifiziert werden und heißen N Instanton[1] Lösungen [16]. Die ein-Instanton Lösung hat die wohlbekannte Form [15]:

$$\begin{aligned} A^a_{I\mu}(x) &= O^{ab}_I \eta^{Q_I}_{b\mu\nu} \frac{(x-z_I)_\nu}{(x-z_I)^2} \frac{2\rho^2}{(x-z_I)^2+\rho^2} \quad \text{in singulärer Eichung} \\ A^a_{I\mu}(x) &= O^{ab}_I \eta^{-Q_I}_{b\mu\nu} \frac{2(x-z_I)_\nu}{(x-z_I)^2+\rho^2} \quad \text{in regulärer Eichung} \\ \gamma_I = (z_I, O_I, \rho_I, Q_I) &= (\text{Ort, Orientierung, Radius, topologische Ladung}) \end{aligned}$$

Die Instanton-Parameter γ_I spiegeln die Symmetrien der Lagrangefunktion wider (Translation, Rotation, Skaleninvarianz, Parität). Es war eine große Leistung von 't Hooft, die Funktional-Determinante im ein-Instanton Hintergrund zu berechnen. Um ein endliches Resultat zu erhalten, muß Z_I auf den $\bar{A}^a_\mu = 0$ Fall normiert, regularisiert und renormiert werden. Das Ergebnis der sehr aufwendigen Berechnung [17] für die Zustandssumme in semiklassischer Approximation ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{Z_I}{Z_0}\right)_{reg} &= \int d\gamma_I \, D(\rho_I) = \frac{1}{2} \sum_{Q_I=\pm 1} \int d^4 z_I dO_I d\rho_I \, D(\rho_I) = V_4 \int_0^\infty d\rho \, D(\rho) = V_4 \bar{D} \\ D(\rho) &= \frac{C_{N_c}}{\rho^5} S_0^{2N_c} e^{-S_1(\rho)} = C_{N_c} \rho^{-5} S_0^{2N_c} (\rho\Lambda)^b \\ C_{N_c} &= \frac{4.6 e^{-1.679 N_c}}{\pi^2 (N_c-1)!(N_c-2)!} \\ S_0 &= \frac{8\pi^2}{g_0^2} \quad , \quad S_1(\rho) = \frac{8\pi^2}{g_1^2(\rho)} = b \ln \frac{1}{\rho\Lambda} \quad , \quad \Lambda = \Lambda_{PV} \\ S_2(\rho) &= \frac{8\pi^2}{g_2^2(\rho)} = b \ln \frac{1}{\rho\Lambda} + \frac{b'}{b} \ln \ln \frac{1}{\rho\Lambda} + O(\frac{1}{\ln \frac{1}{\rho\Lambda}}) \quad , \end{aligned}$$

$D(\rho)$ ist die Dichte der Instantonen mit Radius ρ, $g_{1/2}(\rho)$ ist die laufende Kopplungskonstante in 1/2-Schleifen Approximation, $b = \frac{11}{3} N_c$ und $b' = \frac{17}{3} N_c^2$. S_0 ist die klassische Wirkung eines Instantons und g_0 die nackte (unrenormierte) tree-level Kopplungskonstante. Eine Schätzung für g_0 erhält man, indem man g_0 durch die laufende Kopplung an geeigneter Energieskala ersetzt. Diese unglückliche Situation kann vermieden werden, indem man den 2-Schleifen Ausdruck für $D(\rho)$ verwendet, d.h. S_0 durch S_1 und S_1 durch S_2 ersetzt. Diese Ersetzung stellt allerdings nur für kleine Kopplung eine Verbesserung dar. Wenn ρ die QCD-Skala Λ erreicht, sollte man sich auf eine tree-level oder 1-Schleifen Approximation beschränken, um brauchbare Resultate zu erhalten, da die Störungsreihe nur asymptotisch konvergent ist.

[1] In dieser Arbeit werde ich sowohl Instantonen ($N > 0$) also auch Anti-Instantonen ($N < 0$) Instantonen nennen und sie durch ihre topologische Ladung $Q = N$ unterscheiden.

2.5 Quarks

Zusätzliche Felder, die eichinvariant an das Gluon-Feld gekoppelt sind, können einfach berücksichtigt werden, indem man deren Wirkung zu S_{QCD} addiert, das Eichfeld A durch $\bar{A}+B$ ersetzt und die funktionale Integration über die neuen Felder ausführt. Jedes Quark z.B. gibt einen zusätzlichen Faktor

$$\int D\Psi D\bar{\Psi}\ e^{-\int dx\,\bar{\Psi}(i\not{D}+im)\Psi} = \mathrm{Det}(i\not{D}+im) \tag{2.30}$$

zur Zustandssumme Z, wobei

$$iD_\mu = i\partial_\mu + \bar{A}_\mu + B_\mu \tag{2.31}$$

die kovariante Ableitung ist. In semiklassischer Approximation kann B_μ auf Null gesetzt werden. $D(\rho)$ muß mit dem fermionischen Faktor

$$F(m\rho) := \mathrm{Det}(i\not{D}+im) = \begin{cases} 1.34m\rho(1+m^2\rho^2\ln(m\rho)+\ldots) & \text{für} \quad m\rho \ll 1 \\ 1-\frac{2}{75m^2\rho^2}+\ldots & \text{für} \quad m\rho \gg 1 \end{cases} \tag{2.32}$$

multipliziert werden und b und b' sind jetzt

$$b = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}N_f \quad , \quad b' = \frac{17}{3}N_c^2 - \frac{13}{3}N_cN_f + \frac{1}{2}\frac{N_f}{N_c} \quad . \tag{2.33}$$

2.6 Das Instanton-Flüssigkeits-Modell

Die Summe wohlseparierter Instantonen ($Q_I = \pm 1$) ist ebenfalls eine approximative Lösung der YM-Gleichungen:

$$A = \sum_{I=1}^{N} A_I \quad , \quad S[A] \approx NS_0$$

Die Zustandssumme dieses sog. Instanton-Gases ist

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} Z_N \quad , \quad Z_N \approx \frac{1}{N!}(V_4\bar{D})^N$$

Die Summe wird dominiert durch Instanton-Konfigurationen mit der Dichte $N/V_4 = \bar{D}$. Unglücklicherweise ist $\bar{D}$ unendlich und die Annahme eines stark verdünnten Gases erweist sich als falsch. Die Wahrscheinlichkeit kleiner Instantonen ist klein, da $D(\rho)$ für kleine Abstände rasch gegen Null geht. Auf der anderen Seite divergiert $D(\rho)$ für große Abstände. Dies ist letztendlich eine Folge der wachsenden Kopplungskonstante bei großen Abständen. Dieses sog. Infrarot-Problem ist der Grund, warum sich viele Physiker von der Instanton-Physik abgewendet haben. Es besteht jedoch der folgende Ausweg [27]. Für immer größere Abstände füllt sich das Vakuum mit mehr und mehr Instantonen

wachsender Größe. Auf einer bestimmten Skala bricht die Instanton-Gas-Approximation zusammen und man ist genötigt die Wechselwirkung zwischen den Instantonen zu berücksichtigen, die, wenn man Glück hat, repulsiv ist und das Instanton-Medium stabilisiert. Die Stabilisierung könnte bei Abständen erfolgen bei denen eine semiklassische Behandlung noch möglich ist und für eine Dichte, bei der die Instantonen noch wohlseparierte Objekte, d.h. durch die Wechselwirkung noch nicht stark deformiert sind. Diesem Bild zufolge, das Instanton-Flüssigkeit genannt wird, gibt es einen schmalen Bereich erlaubter Instanton-Radien. Im Laufe der Jahre wurde dieses Bild immer mehr verfeinert und bestätigt:

- Infrarot-Cutoff [14]
- Hardkugel-Modell [24]
- Variations-Ansatz [25]
- Numerische Studien [27]
- Phänomenologie [28]

Der allereinfachste Vorschlag ist, einen Cutoff ρ_c einzuführen und große Instantonen zu ignorieren [14]:

$$\bar{D}_{\rho_c} = \int_0^{\rho_c} d\rho \, D(\rho)$$

Der Cutoff muß so klein gewählt werden, daß der Raumzeit-Bruchteil f, der mit Instantonen besetzt ist kleiner als 1 ist um das Modell eines verdünnten Gases zu rechtfertigen

$$f = \frac{2}{N_c} \int_0^{\rho_c} d\rho \, \frac{1}{2} \pi^2 \rho^4 D(\rho) \quad < \quad 1$$

Dieser einfache Cutoff Ansatz kann durch Einführen einer skaleninvarianten Abstoßung (harte Kugeln), durch die große Instantonen effektiv unterdrückt werden, verbessert werden [24]. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, die Skalen-Ward-Identitäten zu erhalten, die durch den einfachen Cutoff-Ansatz verletzt würden. In [25] wurde eine derartige Abstoßung tatsächlich gefunden und führte zu einer phänomenologisch akzeptablen Packungsdichte. Leider hat sich herausgestellt, daß diese Abstoßung ein Artefakt des einfachen Summen-Ansatzes ist [20]. Folglich ist das Infrarot-Problem immer noch ungelöst.

Dennoch ist es möglich, erfolgreich Vorhersagen zu machen, indem man einfach eine bestimmte Instantondichte und einen Instantonradius annimmt. Das Vakuum scheint durch effektiv unabhängige Instantonen mit Radius $\rho = 600\,\mathrm{MeV}^{-1}$ und mittlerem Abstand $L_0 = 200\,\mathrm{MeV}$ beschrieben werden zu können. Die totale Instanton-Dichte wird durch das experimentell bekannte Gluon-Kondensat fixiert [13]:

$$n = N/V_4 = 1/L_0^4 = \frac{1}{32\pi^2} < G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a >= (200\,\mathrm{MeV})^4_{exp.} \tag{2.34}$$

In Kapitel 3 werden wir zeigen, daß diese Relation nicht durch leichte Quarks modifiziert wird. Das Verhältnis L_0/ρ ist in verschiedenen Arbeiten abgeschätzt worden [25, 27, 29].

$$(L_0/\rho)_{theor.} = 3.0 \ldots 3.2 \quad . \tag{2.35}$$

Das Instanton-Flüssigkeits-Modell ist somit durch folgende Modellannahme für $D(\rho_I)$ definiert:

$$D(\rho_I) = n\delta(\rho_I - \rho) \quad , \quad n = (200 \text{ MeV})^4 \quad , \quad \rho = 600 \text{ MeV}^{-1} \quad . \tag{2.36}$$

Dieses Modell beschreibt sehr erfolgreich die Physik leichter Hadronen. Ausführlich numerische Studien finden sich in [27, 28].

In hochenergetischen Prozessen mit Impulsüberträgen p von $1 - 10$ GeV wird $D(\rho)$ meist mit einer um $\rho \sim p^{-1}$ scharf lokalisierten Funktion multipliziert. Das Integral über ρ ist nun durch kleine Instantonen dominiert und Infrarot-konvergent. Die Ergebnisse sind somit unabhängig vom Infrarot-Cutoff und es müssen keine Modellannahmen gemacht werden. Ein ähnliches Phänomen ermöglicht es in Kapitel 8 eine Relation zwischen dem Quark-Kondensat und der QCD-Skala Λ herzuleiten ohne Modellannahmen machen zu müssen. Allen anderen Kapiteln liegt das Instanton-Flüssigkeits-Modell zugrunde.

Kapitel 3

Der Propagator leichter Quarks

In diesem Kapitel wird der gemittelte Quark-Propagator im Multi-Instanton-Vakuum berechnet. Die in [25] entwickelten Methoden werden um die Hinzunahme dynamischer Quark-Schleifen erweitert. Im ersten Abschnitt wird der Instanton-Hintergrund als klassische externe Störung behandelt. Da der Hintergrund aber nicht klein ist (z.B. in der Kopplungskonstante) müssen wir *alle* Feynman-Graphen aufsummieren. Im Falle eines Quark-Flavors ist dies tatsächlich möglich in der sog. Nullmoden Approximation. Ermöglicht wird dies durch exakte Auslöschung bestimmter Graphen und durch Renormierung der Instantondichte. Als Nebenprodukt wird dabei die Frage, ob in Anwesenheit dynamischer Quarks das Gluon-Kondensat mit der Instanton-Dichte identifiziert werden darf, positiv beantwortet. Das Quark-Kondensat und eine Konstituenten-Quarkmasse werden in Abschnitt 3.8 aus dem Propagator gewonnen. Im letzten Abschnitt wird gezeigt, daß der Fall zweier oder mehrerer Quark-Flavors im Limes $N_c \to \infty$ auf den Fall eines Quark-Flavors reduziert werden kann. Die Resultate des ein-Flavor Falles bleiben also im Rahmen dieser zusätzlichen Approximation weiterhin gültig.

3.1 Störungstheorie im Multi-Instanton Vakuum *

Es ist allgemein bekannt, wie Korrelatoren in Anwesenheit externer Felder berechnet werden, zumindest als Störungsreihe in Potenzen des externen Feldes $A^a_\mu(x)$. Im Falle der QCD im Instanton-Flüssigkeits-Modell ist das externe Feld eine Summe wohlseparierter Streuzentren $A = \sum_I A_I$, die Instantonen genannt werden, einen festen Radius ρ besitzen und statistisch unabhängig und zufällig im Euklidischen Raum verteilt sind.

Für den Anfang werden wir uns auf ein Quark-Flavor beschränken und Gluon-Schleifen vernachlässigen. Die Euklidischen Feynman-Regeln haben die folgende Form:

$$= \quad \frac{1}{\not p + im} \quad = \quad S_0 \quad ,$$

$$= \quad \not A_I \quad . \tag{3.1}$$

In Operator Notation,

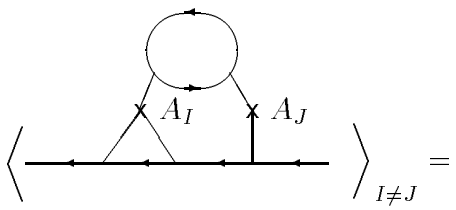
$$\langle p|S_0|q\rangle = \frac{1}{\not p + im}\bar\delta(p-q) \quad , \quad \langle x|\not A_I|y\rangle = \not A_I(x)\delta(x-y) \quad , \tag{3.2}$$

$$\bar\delta^{\,d}(\cdots) := (2\pi)^d\delta(\cdots) \quad , \quad \int \bar d^d p := \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \quad ,$$

haben die Graphen die Bedeutung von Ketten bestehend aus einer alternierenden Folge von S_0 und A_I. Um einen Graphen über die Instanton-Parameter γ_I zu mitteln, hat man folgende Integration für jedes Instanton auszuführen:

$$\langle\ldots\rangle_I = \frac{N}{V_4}\int d\gamma_I \ldots = \frac{N}{2}\sum_{Q_I=\pm}\frac{1}{V_4}\int d^4z_I \int dO_I \ldots \quad . \tag{3.3}$$

Zum Beispiel



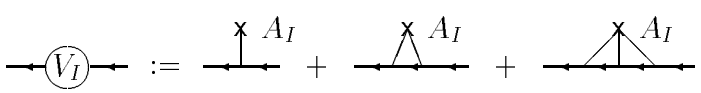
$$= -\frac{N^2}{V_4^2}\int d\gamma_I d\gamma_J \langle p|S_0\not A_I S_0\not A_I S_0\not A_J S_0|q\rangle \mathrm{Tr}(S_0\not A_J S_0\not A_I) \quad . \tag{3.4}$$

Summation über alle Paare verschiedener Instantonen (I,J) ergibt den Faktor $N(N-1)\approx N^2$. Die Quark-Schleife ist die Ursache des Minuszeichens und der Funktional-Spur "Tr".

3.2 Exakte Streuamplitude im ein-Instanton Vakuum *

Die Störungstheorie ist geeignet, um Streuprozesse zu studieren. Um chirale Symmetriebrechung oder Bindungszustände zu erhalten, ist es nötig, eine unendliche Reihe einer Unterklasse von Graphen aufzusummieren oder Schwinger-Dyson- oder Bethe-Salpeter-Gleichungen zu lösen.

Als erstes können wir sukzessive Streuungen an einem Instanton aufsummieren



$$V_I := \not A_I + \not A_I S_0 \not A_I + \not A_I S_0 \not A_I S_0 \not A_I + \ldots = S_0^{-1}(S_I - S_0)S_0^{-1} \tag{3.5}$$

wobei

$$S_I = (S_0^{-1} - \not A_I)^{-1} \tag{3.6}$$

der Quark-Propagator im ein-Instanton-Vakuum und V_I die zugehörige exakte Streuamplitude ist.

3.3 Nullmoden Approximation

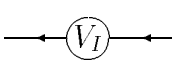
Der Quark-Propagator im ein-Instanton-Vakuum hat die Spektraldarstellung

$$(i\partial\!\!\!/ - A\!\!\!/_I)\psi_l = \lambda_l \psi_l \quad \Longrightarrow \quad \langle x|S_I|y\rangle = \sum_l \frac{\psi_l(x)\psi_l^\dagger(y)}{\lambda_l + im} \quad . \tag{3.7}$$

wobei λ_l und ψ_l die Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen des Dirac-Operators sind. Es gibt einen Eigenwert Null $iD\!\!\!/\psi_I = 0$ (↑Anhang A.2) der den Propagator im chiralen Limes singulär werden läßt:

$$S_I = \frac{|\psi_I\rangle\langle\psi_I|}{im} + S_I^{NZM} \quad . \tag{3.8}$$

In der sog. Nullmoden Approximation erstzt man den Nicht-Nullmoden-Anteil durch den freien Propagator



$$= S_I - S_0 \approx \frac{|\psi_I\rangle\langle\psi_I|}{im} \quad . \tag{3.9}$$

Obwohl diese Approximation gut für kleine wie auch für große Impulse ist, kann sie schlecht für mittlere Impulse sein. Wichtiger aber ist die Tatsache, daß dies eine wilde (unsystematische) Approximation ist, die allgemeine Theoreme wie Ward-Identitäten verletzen kann. Im Gegensatz hierzu sind alle anderen Approximationen systematischer Natur, da sie alle bekannten Symmetrien der QCD respektieren.

- Semiklassische Approximation (systematisch)
- Multi-Instanton-Vakuum ("systematisch")
- $1/N_c$ Entwicklung (systematisch) (↑letzten Abschnitt)
- Nullmoden Approximation (wild)

Man beachte, daß jede Wahl eines Hintergrund-Eichfeldes "systematisch" ist, im Sinne alle Symmetrien der QCD zu respektieren, solange über alle Symmetrie-Parameter gemittelt wird.

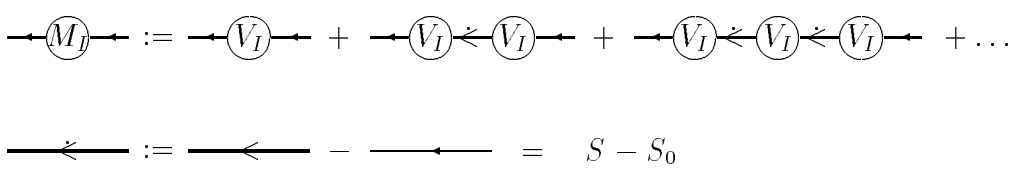
In den folgenden Abschnitten werden wir sehen, daß die Vereinfachungen, die die Nullmoden Approximation mit sich bringt, so groß sind, daß wir auf diesen Vorteil nicht verzichten können.

3.4 Effektiver Vertex im Multi-Instanton-Vakuum *

In Abschnitt 3.2 wurde die exakte Streuamplitude im ein-Instanton-Vakuum berechnet (V_I). In diesem Abschnitt werde ich einen formalen Ausdruck für die exakte Streuamplitude an einem Instanton, welches sich in einem Multi-Instanton-Bad befindet herleiten (M_I).

Betrachten wir eine Quarklinie mit zweimaliger Streuung an V_I, wobei wir zwischen beiden Streuungen eine Reihe von Instantonen einschieben, die verschieden sind von I und allen Instantonen, die anderswo im Graphen vorkommen. Dies ermöglicht eine Mittelung der eingeschlossenen Instantonen unabhängig vom restlichen Graphen. Aufsummation aller Einschübe dieser Form, die mindestens ein Instanton enthalten, ergibt gerade den exakten Quark-Propagator S minus dem freien Propagator S_0. Man beachte, daß direkt wiederholte Streuung an A_I bereits in V_I berücksichtigt wurde und somit "verboten" ist.

Wir definieren



(3.10)

$$\begin{aligned} M_I &= V_I + V_I(S-S_0)V_I + V_I(S-S_0)V_I(S-S_0)V_I + \ldots \\ &= V_I + V_I(S-S_0)M_I \quad . \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nach M_I aufgelöst werden, indem wir folgenden Ansatz für M_I machen:

$$M_I = \frac{1}{i\mu} S_0^{-1}|\psi_I\rangle\langle\psi_I|S_0^{-1} \tag{3.11}$$

Setzen wir M_I und V_I in (3.10) ein, so erhalten wir:

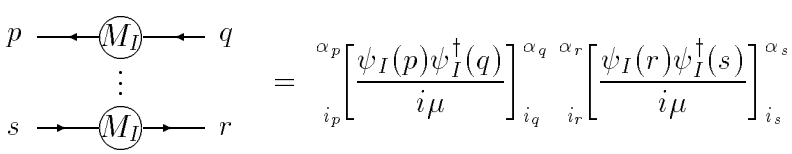
$$\frac{1}{i\mu} S_0^{-1}|\psi_I\rangle\langle\psi_I|S_0^{-1} = \frac{1}{im}(1 + \frac{1}{i\mu}\langle\psi_I|S_0^{-1}(S-S_0)S_0^{-1}|\psi_I\rangle)S_0^{-1}|\psi_I\rangle\langle\psi_I|S_0^{-1} \tag{3.12}$$

$$\Longrightarrow \quad \mu = m + i\langle\psi_I|S_0^{-1}(S-S_0)S_0^{-1}|\psi_I\rangle \quad . \tag{3.13}$$

Das Instanton-Bad bewirkt folglich eine Ersetzung der Strom-Masse m durch eine effektive Masse μ.

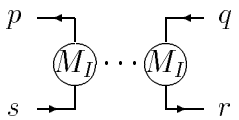
3.5 Eine willkommene Auslöschung *

Im folgenden zeigen wir, daß jeder Graph, der ein M_I mehr als einmal enthält, einen Partner besitzt, der diesen kompensiert. Man betrachte einen Graphen , der zwei Streuungen M_I am gleichen Instanton enthält. Der uns interessierende Teil des Graphen hat die folgende Gestalt:



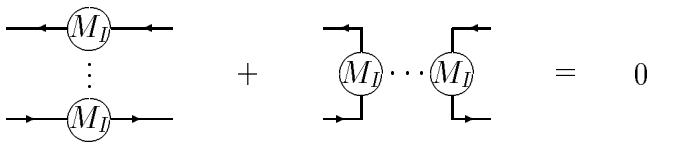
(3.14)

α_p/i_p sind Farb-/Dirac-Indizes am Quark-Bein mit Impuls p. In einem physikalischen Prozess gibt es zusätzlich zu dem Graphen, der den oben angegebenen Subgraphen enthält, einen weiteren Graphen, in dem nur zwei Quark-Linien vertauscht sind:



$$= - \overset{\alpha_p}{}_{i_p}\left[\frac{\psi_I(p)\psi_I^\dagger(s)}{i\mu}\right]^{\alpha_s}_{i_s} \overset{\alpha_r}{}_{i_r}\left[\frac{\psi_I(r)\psi_I^\dagger(q)}{i\mu}\right]^{\alpha_q}_{i_q} \tag{3.15}$$

Wie immer verursacht die Vertauschung zweier Quark-Linien ein Minuszeichen in der Amplitude. Durch einen kurzen Blick auf beide Ausdrücke überzeugt man sich, daß sie bis auf das Minuszeichen übereinstimmen. Wir erhalten somit eine vollständige Auslöschung:



(3.16)

Wann immer ein M_I zwei- oder mehrfach in einem Graphen auftritt, existiert ein weiterer Graph mit umgekehrtem Vorzeichen. Beide Beiträge heben sich gegenseitig auf und können ignoriert werden. D.h. ein Quark kann an jedem Instanton nur einmal via M_I streuen. Dies kann man auch auf andere Weise sehen: Aufgrund der Fermi-Statistik kann jeder Zustand nur einmal besetzt werden, aber es gibt nur einen Zustand für jedes Quark in der Nullmoden Approximation – und zwar die Nullmode.

Es gibt zwei äquivalente Formulierungen der Feynman-Regeln:

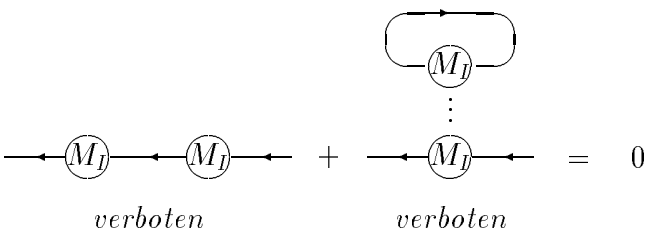
1. Zeichne alle topologisch verschiedenen Graphen, wobei die Ecken nicht nummeriert sind, und ordne jedem Graphen einen Symmetriefaktor zu.

2. Zeichne alle topologisch verschiedenen Graphen, wobei die Ecken nummeriert sind, und ordne jedem Graphen einen Faktor $1/v!$ zu, wobei v die Anzahl der Ecken ist.

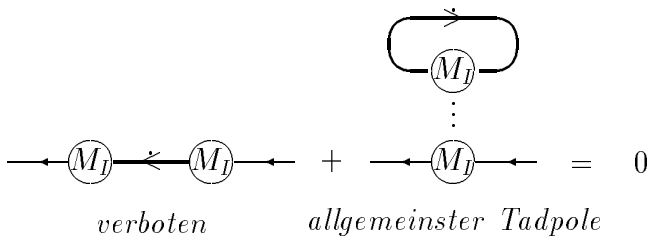
Wenn alle Graphen, die M_I enthalten, erlaubt sind, ist es im Rahmen der zweiten Beschreibung nicht schwer zu sehen, daß sie tatsächlich zu Paaren geordnet werden können.

3.6 Renormierung der Instanton-Dichte *

Bis jetzt ist die Auslöschung noch unvollständig, da nicht alle Graphen erlaubt sind. Betrachte z.B.



Wie im Falle von V_I sind beide Graphen nicht erlaubt. Ein weiteres Beispiel ist



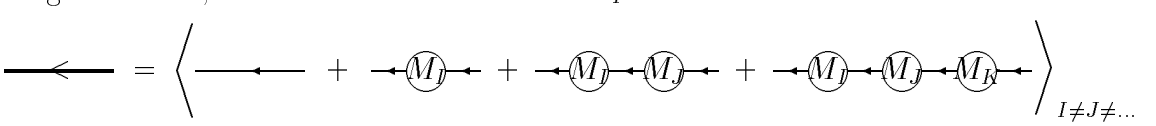
Es ist eine allgemeine Tatsache, daß verbotene Graphen mit anderen verbotenen Graphen oder mit Tadpolen gepaart werden können und umgekehrt.

Wir müssen also irgendwie alle Tadpole-Graphen verbieten. Jedes M_I kann mit Tadpolen umgeben werden, die als universeller multiplikativer Faktor beitragen, der in eine Umdefinition der Instantondichte n absorbiert werden kann. Verwendet man diese renormierte Dichte[1] $n_R N_c$, so ist die Paarung nun perfekt und der Satz "jedes M_I tritt nur einmal auf" ist jetzt wahr.

Wie man sich graphisch leicht überzeugen kann, muß in Anwesenheit dynamischer Quarks diese renormierte und nicht die nackte Instantondichte mit dem Gluon-Kondensat identifiziert werden, da die gleichen Tadpole auch im Gluon-Kondensat beitragen. Die oft gestellte Frage, ob in Anwesenheit leichter Quarks das Gluonkondensat mit der Instantondichte identifiziert werden darf, ist in obigem Sinne also mit 'Ja' zu beantworten!

3.7 Selbstkonsistenz-Gleichung für den Quark-Propagator *

Quark-Schleifen sind nicht länger möglich, da sie nicht durch ein gemeinsames Instanton mit anderen Teilen des Graphen verbunden werden können. Alle Graphen, die noch Beitragen können, sind Ketten verschiedener $M_I's$:



Die $M_I's$ können unabhängig voneinander gemittelt werden

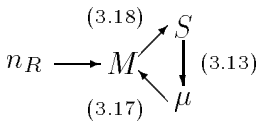
$$M := i\langle M_I \rangle_I \quad , \quad M_p \equiv M_\rho(p) := \langle p|M|p\rangle = \frac{n_R}{2\mu} p^2 \varphi^2(p) \quad . \tag{3.17}$$

φ ist in Anhang A definiert. Das Ergebnis für den Propagator hat die Form

$$S = S_0 + S_0 \frac{M}{i} S_0 + S_0 \frac{M}{i} S_0 \frac{M}{i} S_0 + \ldots = (S_0^{-1} + M)^{-1} \tag{3.18}$$

Noch eine Sache ist zu erledigen: Wir müssen die zyklische Abhängigkeit

[1] n_R ist als renormierte *und* durch N_c dividierte Dichte definiert!



lösen. Dies ist einfach, da μ nur eine Zahl ist. Durch Einsetzen von (3.17) und (3.18) in (3.13) erhält man folgende Gleichung für μ

$$\mu = m + \int \bar{d}^4p \, \frac{2\varphi^2(p)M_p}{p^2 + (m+M_p)^2}(p^2 + m(m+M_p)) \tag{3.19}$$

die z.B. numerisch für verschiedene Massen gelöst werden kann.

3.8 Ein wenig Phänomenologie

Im chiralen Limes reduziert sich (3.19) zu

$$\mu^2 = n_R \int \bar{d}^4p \, \frac{p^4\varphi^4(p)}{p^2 + M_p^2} = \alpha n_R \rho^2 + O(n_R^2) \tag{3.20}$$

μ^2 ist proportional zu n_R und somit ist M proportional zu $\sqrt{n_R}$. Dies steht im Gegensatz zu einer linearen Abhängigkeit, die man durch eine naive Dichte-Entwicklung erhalten würde.

Der letzte Ausdruck wurde durch Entwicklung des Nenners in der Dichte gewonnen, wobei

$$\alpha = \rho^{-2} \int \bar{d}^4p \, p^2 \varphi^4_{sing}(p) = 6.6 \tag{3.21}$$

ist eine universelle Zahl. In Kapitel 8 wird ausführlich diskutiert, daß für kleine Impulse die singuläre und für große Impulse die reguläre Eichung zu verwenden ist, wobei der Grenzbereich bei $p\rho \approx 1$ liegt. Da das Integral durch Impulse $p\rho < 1$ dominiert wird, muß die singuläre Eichung verwendet werden. Für die Standardwerte von n_R und ρ erhält man [25]

$$\begin{aligned} \mu_0^2 &= 6.6 n_R \rho^2 = (100\text{MeV})^2 \quad , \\ M_\rho(p=0) &= 7.7\rho\sqrt{n_R} = 300\text{MeV} \quad . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Die exakte Lösung von (3.20), die durch numerische Iterationen gewonnen werden kann, vergrößert die Masse um 15%:

$$M_\rho(0) = 345 \text{ MeV} \quad . \tag{3.23}$$

Die Impulsabhängigkeit der Masse ist in Abbildung B.2 gezeigt. Mit gebotener Vorsicht kann man $m + M_\rho(p)$ als Masse eines Konstituenten-Quarks interpretieren. Für hohe Energien geht der Ausdruck gegen die Strom-Masse, bei kleinen Impulsen ist die chirale Symmetrie gebrochen und das Quark nimmt seine Konstituenten-Masse $m + M_\rho(0)$ an.

Man beachte, daß dies keine Polmasse, sondern eine virtuelle Masse bei $p^2 = 0$ ist. Man sollte vielleicht in diesem Zusammenhang den etwas irreführenden Begriff 'Masse' durch 'Selbstenergie' ersetzen.

Wir wollen nun eine kleine Strom-Masse, formal von der Ordnung $\sqrt{n_R}$, berücksichtigen. Die Selbstkonsistenz-Gleichung (3.19) lautet nun

$$1 = \frac{m}{\mu} + \frac{\mu_0^2}{\mu^2} + O(n_R) \quad . \tag{3.24}$$

Auflösen nach μ ergibt

$$\mu_0 \quad \leq \quad \mu = \frac{1}{2}m + \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \mu_0^2} \quad \leq \quad m + \mu_0 \quad . \tag{3.25}$$

Für das Strange-Quark ist μ um den Faktor 2 vergrößert:

$$\mu(m_s = 150\text{MeV}) = 200\text{MeV} \tag{3.26}$$

Interessanterweise bleibt $m_s + M_\rho(0)$ unverändert 300MeV. Für Impulsübertrag Null wird die Vergößerung der Strom-Masse gerade durch ein gleich großes Schrumpfen der dynamischen Masse $M_\rho(0)$ kompensiert. Vermutlich ist die Vernachlässigung der nicht-Nullmoden, die für Strange-Quarks wichtig werden können, für die phänomenologisch zu kleine Masse verantwortlich.

Aus dem Propagator kann man das Quark-Kondensat gewinnen

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle := \lim_{x\to 0} \text{tr}_{CD}(S(x) - S_0(x)) = N_c \int d^4p \, \text{tr}_D(S(p) - S_0(p)) \quad . \tag{3.27}$$

In führender Ordnung in der Dichte erhält man

$$i\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \frac{n_R N_c}{\mu} = \langle G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu}\rangle / 32\pi^2\mu \quad . \tag{3.28}$$

Folgende Werte ergeben sich für die Kondensate der u, d und s Quarks:

$$i\langle\bar{u}u\rangle = i\langle\bar{d}d\rangle = (250\text{MeV})^3 \quad , \quad \langle\bar{s}s\rangle = 0.5\langle\bar{u}u\rangle \quad . \tag{3.29}$$

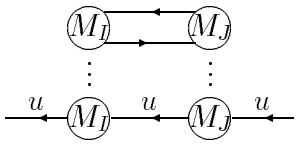
Für schwere Quarks gibt es eine ähnliche Relation

$$i\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \langle G^a_{\mu\nu} G_a^{\mu\nu}\rangle / 48\pi^2 m + O(m^{-3}) \quad , \tag{3.30}$$

die innerhalb einer Genauigkeit von 10% zu demselben Wert für das Strange-Quark-Kondensat führt. Dies bestätigt die Hypothese, daß Strange-Quarks sowohl als leicht, wie auch als schwer angesehen werden können. Diese Hypothese geht in Formeln ein, die Ausdrücke für schwere an solche für leichte Quarks anpassen (heavy-to-light-quark-matching).

3.9 $1/N_c$ Entwicklung *

Wir wenden uns nun dem Fall von N_f leichten Quark-Flavors $u, d, s, \ldots$ zu. Die Diskussion des ein-Flavor Falles in den vorangegangenen Abschnitten kann bis zur paarweisen Auslöschung von Graphen, die mehr als ein M_I enthalten, kopiert werden. (3.16) ist auch im Falle mehrerer Quark-Flavors wahr, solange beide Quark-Linien in (3.16) zum gleichen Flavor gehören, denn M_I kann nur Quarks gleichen Flavors verbinden. Es gilt also der Statz: "Jedes M_I tritt pro Flavor nur einmal auf". Von dieser Stelle an bricht die Diskussion des ein-Flavor Falles zusammen, da es im Falle mehrerer Flavors Graphen mit Quark-Schleifen gibt, die zum Propagator beitragen. Der einfachste neue Beitrag hat die Form



Kann dieser Beitrag in irgendeinem Sinne als klein angesehen werden? Dies ist tatsächlich der Fall, denn Quark-Schleifen sind mit dem Faktor $1/N_c$ unterdrückt. In störungstheoretischem Kontext ist dies ausführlich in [62] diskutiert, in der Instanton-Physik wurde dies zuerst in [25] ausgenutzt. Obwohl 1/3 keine sehr kleine Zahl ist, scheint die $1/N_c$ Entwicklung in vielen Fällen eine gute Approximation zu sein[2].

Betrachten wir einen Graphen und fügen eine weitere Quark-Schleife hinzu, bestehend aus:

$$\begin{array}{ll} N & \text{neuen Instantonen} \\ S & \text{Instanton-Streuungen} \end{array} \qquad S \geq N \quad .$$

Dies multipliziert den Graphen (↑Tabelle 3.1) mit einem Faktor $O(N_c^{1+N-S})$. Folgende Fälle sind möglich:

$1+N-S$	
$=1$	$\Longleftrightarrow N=S \Longleftrightarrow$ alle Instantonen sind neu
	$\Longleftrightarrow$ die Schleife ist unverbunden
$=0$	$\Longleftrightarrow$ ein altes Instanton $\Longleftrightarrow$ Die Schleife ist ein Tadpole
<0	die Schleife ist mindestens mit $1/N_c$ unterdrückt

Unverbundene Graphen werden durch Zustandsnormierung eliminiert und Tadpole wurden in die renormierte Instanton-Dichte absorbiert. Quark-Schleifen sind also tatsächlich im Limes $N_c \to \infty$ unterdrückt. Zieht man die N_c-Abhängigkeit aus Tabelle 3.1 erneut heran, so sieht man, daß das gleiche Argument auch für Gluon-Schleifen gilt.

[2] Man beachte, daß auch in der QED die Ladung $e = 0.3$ nicht klein ist, der tatsächliche Entwicklungs-Parameter $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$ aber winzig ist.

Parameter	n_R, ρ, N_c
Instanton-Dichte	$n = N/V_4 = n_R N_c \approx (200\text{MeV})^4$
Instanton-Radius	$\rho \approx (600\text{MeV})^{-1}$
Anzahl der Farben	$N_c = 3$
Gluon-Kondensat	$\langle GG \rangle = \langle G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a \rangle / 32\pi^2 =: n_R N_c$
Quark-Kondensat	$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \approx 0.39\, N_c \rho^{-1} \sqrt{n_R} \approx (253\text{MeV})^3$
Konstituenten-Masse	$M_\rho(p) \sim \rho\sqrt{n_R}$
Quark-Masse	$M_{quark}(0) \approx 7.7\, \rho\sqrt{n_R} \approx 300\text{MeV}$
Gluon-Masse	$M_{gluon}(0) \approx 12.6\, \rho\sqrt{n_R} \approx 480\text{MeV}$[40]
Geist-Masse	$M_{ghost}(0) \approx 8.9\, \rho\sqrt{n_R} \approx 340\text{MeV}$[40]
Meson-Korrelator	$\langle \bar{\psi}\Gamma\psi(x)\bar{\psi}\Gamma\psi(0)\rangle_{trunc.} \sim N_c$
Quark-Schleife	$\sim N_c$
Instanton-Streuung	$\sim N_c^{-1} \rho n_R^{-1/2}$
Instanton-Auftreten	$\sim N_c n_R$
Gluon-Schleife	$\sim N_c^2 - 1$
Instanton-Streuung	$\sim (N_c^2 - 1)^{-1}$

Tabelle 3.1: *Abhängigkeit verschiedener Größen von den Parametern des Instanton-Flüssigkeit-Modells* n_R, ρ, N_c.

3.10 Zusammenfassung

Der Quark-Propagator wurde im Instanton-Flüssigkeits-Modell in Nullmoden Approximation und in $1/N_c$ Entwicklung berechnet. Dynamische Quark-Schleifen konnten in eine renormierte Instanton-Dichte absorbiert werden, welche mit dem Gluon-Kondensat zu identifizieren ist. Im Falle eines Quark-Flavors ist die $1/N_c$-Entwicklung exakt. Die Werte für die dynamische Quark-Masse und das Quark-Kondensat wurden für up, down und strange Quark berechnet. In jeder Ordnung Störungstheorie sind dynamische Quark-Schleifen für alle Prozesse im Limes $N_c \to \infty$ unterdrückt. Für den Quark-Propagator bleibt diese Tatsache über die Störungstheorie hinaus gültig. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß es in Meson-Korrelatoren nicht-unterdrückte Quark-Schleifen gibt.

Kapitel 4

Vier-Punkt-Funktionen

In diesem Kapitel werden die Korrelatoren von vier Quark-Feldern im Instanton-Flüssigkeits-Modell in Nullmoden Approximation berechnet. Von besonderer Bedeutung ist dabei die Beobachtung, daß in führender Ordnung in $1/N_c$ nicht alle Quark-Schleifen unterdrückt sind. Aufsummation aller Graphen führt in Abschnitt 4.2 auf Bethe-Salpeter-Gleichungen, die in Abschnitt 4.3 gelöst werden. In Abschnitt 4.4 werden die Ergebnisse für die verbundenen und freien Flavor-Singulett und -Triplett-Korrelatoren zusammengestellt.

4.1 Einführung

Im letzten Kapitel haben wir effektive Feynman-Regeln in der Nullmoden Approximation hergeleitet:

$$= \frac{1}{\not{p} + im} = S_0(p)$$

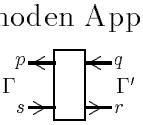
$$= \frac{1}{i\mu} \not{p} \psi_I(p) \psi_I^\dagger(q) \not{q}$$

Ein Quark eines bestimmten Flavors kann nur einmal am Instanton I via M_I streuen. Tadpole-Graphen sind nicht erlaubt, sie sind in der renormierten Instanton-Dichte n_R absorbiert, die zu benutzen ist, wenn über die Instantonen gemittelt wird. Im Falle des Quark-Propagators sind dynamische Quark-Schleifen im Limes $N_c \to \infty$ unterdrückt und μ kann mittels (3.19) bestimmt werden. Im chiralen Limes haben wir

$$\mu^2 = 6.6 n_R \rho^2 + O(n_R^2) \tag{4.1}$$

gefunden. In diesem Kapitel werden wir die 4-Punkt-Funktionen im Falle zweier Quark-Flavors gleicher Masse im Limes $N_c \to \infty$ in der Nullmoden Approximation berechnen:

$$\delta(p - s + r - q)\Pi_{\Gamma\Gamma'}(p, s, q, r) =$$



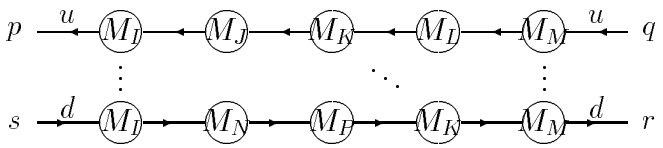
$$= \tag{4.2}$$

$$= -\int dxdydzdw\, e^{i(py-qz+rw-sx)} \langle 0|\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(y)\bar{\psi}(z)\Gamma'\psi(w)|0\rangle \quad .$$

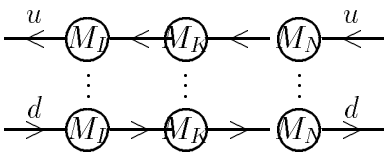
Das ψ-Feld steht für u und d Quark-Felder in beliebiger Kombination und $\Gamma = (\mathbb{1}_D, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}, \gamma_\mu\gamma_5, \gamma_5)$ ist eine der 16 Dirac-Matrizen. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nur Farb-Singulett-Korrelatoren. Die 4-Punkt-Funktionen können zum Studium von Meson-Korrelatoren (↑Kapitel 5) und Quark-Formfaktoren (↑Kapitel 6) verwendet werden.

4.2 $1/N_c$ Approximation *

Der allgemeinste Graph, der zum Quark-Propagator beiträgt, ist nach den Regeln aus Abschnitt 4.1, eine Folge verschiedener Instantonen M_I. Analog besteht der allgemeinste Graph eines Flavor-Triplett-Korrelators $\langle(\bar{u}d)(\bar{d}u)\rangle$ aus zwei Quark-Propagatoren, wobei jeder Propagator jedes Instanton nur einmal enthält, z.B.

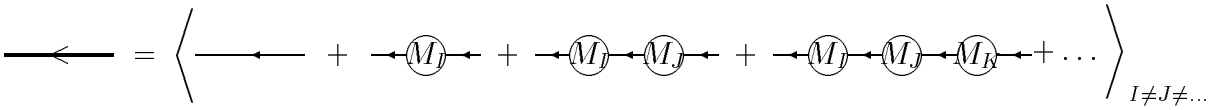


Die linke und rechte Seite des Graphen bilden Farb-Singuletts nach Voraussetzung. Nichtgemeinsame Instantonen können wie im Propagator-Fall gemittelt werden. Dies führt zu Graphen der Form

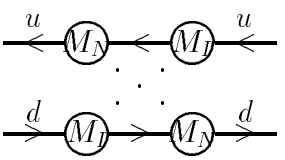


(4.3)

wobei die fetten Linien mit großem Pfeil für den exakten Propagator stehen

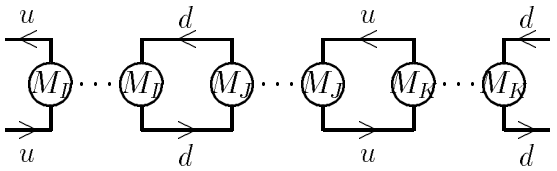


Es kann gezeigt werden, daß nicht-planare Graphen, wie



mit $1/N_c$ unterdrückt sind, wieder unter der Voraussetzung, daß die linke und rechte Seite Farb-Singuletts bilden. Folglich können nur die in (4.3) gezeigten Leiter-Diagramme zum Triplett-Korrelator beitragen.

Man könnte meinen, daß der gemischte Korrelator $\langle(\bar{u}u)(\bar{d}d)\rangle$ Null ist, da die Graphen notwendigerweise Quark-Schleifen enthalten, oder daß vielleicht nur der zwei-Schleifen Graph beiträgt. Dies ist jedoch nicht der Fall! Lassen Sie mich zuerst das Resultat angeben und es anschließend diskutieren: Graphen, die zum gemischten Korrelator beitragen sind Ketten von Quark-Schleifen



(4.4)

Abzählen der N_c-Potenzen zeigt, daß diese Kette von der Ordnung $1/N_c$ ist. Nach Ausführung der Farb-Spur auf der linken und der rechten Seite von (4.4), sehen wir, daß der gemischte Korrelator von der Ordnung N_c ist. Formel (3.16) zeigt, daß der Triplett-Korrelator von derselben Ordnung ist.

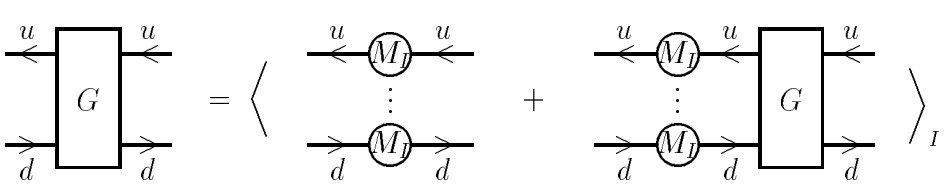
Was ist in diesem Zusammenhang falsch an der im letzten Kapitel gezeigten Unterdrückung von Quark-Schleifen? Eine wesentliche Annahme war, daß jeder Graph, der eine Quark-Schleife enthält, aus einem Graphen konstruiert werden kann, der diese Schleife nicht enthält, indem diese Schleife einfach hinzugefügt wird. Elimiert man eine Schleife aus der Kette in (4.4) erhält man einen unverbundenen Graphen. Da wir nur die verbundenen 4-Punkt-Funktionen betrachten, kann die Kette folglich nicht auf eine Weise konstruiert werden, die nötig wäre, um die Unterdrückung von Quark-Schleifen zu beweisen.

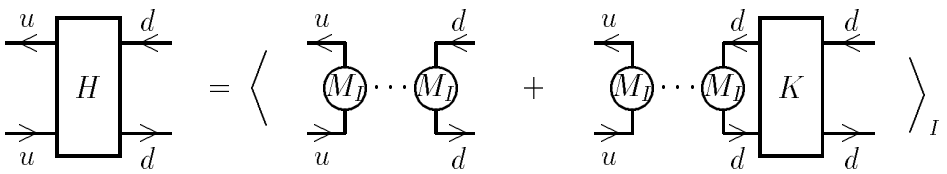
Im Spezialfall von Meson-Korrelatoren (↑Kapitel 5) kann man auch einen anderen Standpunkt einnehmen. Der unverbundene zwei-Schleifen-Beitrag ist von der Ordnung N_c^2, der allerdings (außer im skalaren Fall) Null ist. Folglich ist die Schleifen-Kette kein führender Beitrag in N_c und nichts wurde bisher über nicht-führende Beiträge gezeigt.

Auf der anderen Seite kann man alle verbundenen Graphen durch Hinzufügen weiterer Instantonen und Schleifen zu (4.4) konstruieren — aber nun zeigt ein Abzählen der N_c-Potenzen, daß jeder Versuch in einer $1/N_c$ Unterdrückung endet. Folglich ist obige Kette der allgemeinste Graph in führender Ordnung.

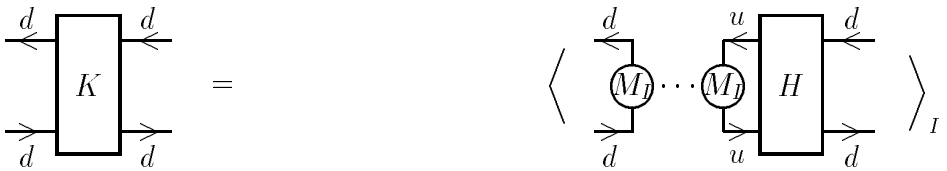
Die gleichen Argumente gelten für den $\langle(\bar{d}d)(\bar{d}d)\rangle$ Korrelator, nur daß die Kette (4.4) mit d startet.

Um die 4-Punkt-Funktionen zu erhalten, müssen die Ketten gemittelt und aufsummiert werden. Alternativ kann dies in rekursiver Form, meist Bethe-Salpeter-Gleichung genannt, geschrieben werden:





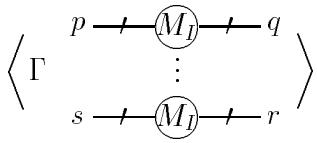
(4.5)



4.3 Lösung der Bethe-Salpeter-Gleichung *

Als erstes müssen wir den Integralkern der BS-Gleichung bestimmen. Die linke Seite des Integralkerns bildet immer ein Farb-Singulett, da nur Farb-Singulett-Korrelatoren betrachtet werden. Im folgenden wird in singulärer Eichung, die für kleine Impulse geeignet ist, gearbeitet (↑Kapitel 8).

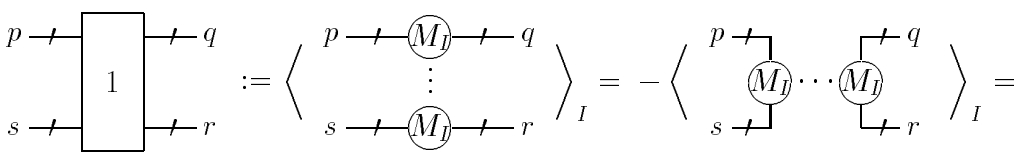
Kontraktion der Farb- und Dirac-Indizes auf der linken Seite und Verwendung der Formeln aus Anhang A.2 und A.3 ergibt



$$= \frac{1}{(i\mu)^2}\langle \not{r}\psi_I(r)\psi_I^\dagger(s)\not{s}\Gamma\not{p}\psi_I(p)\psi_I^\dagger(q)\not{q}\rangle_I = \tag{4.6}$$

$$= -\frac{n_R}{\mu^2} p\varphi(p) q\varphi(q) r\varphi(r) s\varphi(s) \vec{\delta}(p-s+r-q) \left\langle \mathrm{tr}_D \left(\Gamma \frac{1\pm\gamma_5}{2} \right) \frac{1\pm\gamma_5}{2} \right\rangle_\pm .$$

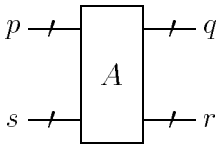
Der Integralkern lautet folglich



$$= -\frac{1}{n_R N_c} \sqrt{M_p M_q M_r M_s}\, \vec{\delta}(p-s+r-q) \left(\delta^{i_p}_{\ i_s} \delta^{i_r}_{\ i_q} + \gamma_5^{i_p}{}_{i_s} \gamma_5^{i_r}{}_{i_q} \right) \delta^{\alpha_p}_{\ \alpha_s} \delta^{\alpha_r}_{\ \alpha_q} \quad . \tag{4.7}$$

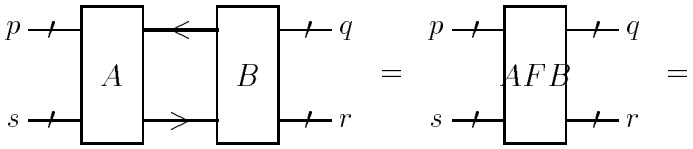
Das Ergebnis ist proportional zur nicht-lokalen Version des 't Hooft Vertex zwischen Farb-Singulett-Zuständen.

Die Lösung der BS-Gleichung hat eine ähnliche Struktur wie der Integralkern:



$$:= \quad -\frac{1}{n_R N_c}\sqrt{M_p M_q M_r M_s}\,\tilde{\delta}(p-s+r-q) \qquad (4.8)$$
$$\left(A_0(t)\delta^{i_p}_{\ i_s}\delta^{i_r}_{\ i_q} + A_5(t)\gamma_5^{\ i_p}_{\ \ i_s}\gamma_5^{\ i_r}_{\ \ i_q}\right)\delta^{\alpha_p}_{\ \alpha_s}\delta^{\alpha_r}_{\ \alpha_q} \quad .$$

A_0 und A_5 sind skalare Funktionen, die nur von $t = p - s = q - r$ abhängen. Der Beweis ist einfach: Der Integralkern ist von der Struktur (4.8) mit $A_0 = A_5 = 1$ und das Produkt zweier Vertices führt auf dieselbe Struktur.



$$= \quad -\frac{1}{n_R N_c}\sqrt{M_p M_q M_r M_s}\,\tilde{\delta}(p-s+r-q) \qquad (4.9)$$
$$\left(A_0F_0B_0(t)\delta^{i_p}_{\ i_s}\delta^{i_r}_{\ i_q} + A_5F_5B_5(t)\gamma_5^{\ i_p}_{\ \ i_s}\gamma_5^{\ i_r}_{\ \ i_q}\right)\delta^{\alpha_p}_{\ \alpha_s}\delta^{\alpha_r}_{\ \alpha_q} \quad ,$$

$$F_0(t) \quad = \quad -\int (dpds)\frac{1}{n_R}M_pM_s\,\mathrm{tr}_D(S(p)S(s)) \quad , \qquad (4.10)$$

$$F_5(t) \quad = \quad -\int (dpds)\frac{1}{n_R}M_pM_s\,\mathrm{tr}_D(S(p)\gamma_5 S(s)\gamma_5) \quad , \qquad (4.11)$$

$$\int (dpds) := \int \bar{d}p\bar{d}s\;\tilde{\delta}(p-s-t) \quad .$$

Mit anderen Worten, Vertices der Struktur (4.8) bilden eine geschlossene Algebra. Der Grund für dieses einfache Resultat ist, daß der Integralkern eine einfache Produktfunktion ist, abgesehen von der impulserhaltenden δ-Funktion.

Mittels (4.7), (4.8) und (4.9) reduziert sich die BS-Gleichung (4.5) auf primitive algebraische Gleichungen für $G_{0/5}(t)$, $H_{0/5}(t)$ und $K_{0/5}(t)$:

$$\begin{aligned} G_{0/5}(t) &= 1 + F_{0/5}(t)G_{0/5}(t) \quad , \\ H_{0/5}(t) &= -1 - F_{0/5}(t)K_{0/5}(t) \quad , \\ K_{0/5}(t) &= -F_{0/5}(t)H_{0/5}(t) \quad , \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$G = \frac{1}{1-F} \quad , \quad H = -\frac{1}{1-F^2} \quad , \quad K = \frac{F}{1-F^2} \qquad (4.12)$$

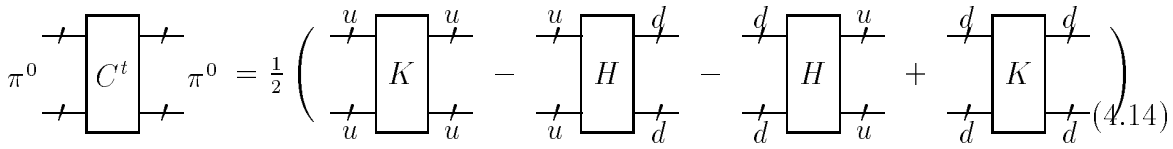
wobei der Index 0 bzw. 5 und das Argument t unterdrückt wurden.

4.4 Triplett- und Singulett-Korrelator *

Aufgrund der Isospin-Symmetrie bilden Mesonen Tripletts und Singuletts. Ersetzt man $\bar{\psi}\psi$ in (4.2) durch entsprechende Triplett- and Singulett-Kombinationen (wobei wir uns die Notation des pseudoskalaren Korrelators borgen)

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d), \quad \pi^+ = \bar{u}d, \quad \pi^- = \bar{d}u, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d), \tag{4.13}$$

so gilt



(4.14)

Folglich ist $C^t = K - H = \frac{1}{1-F}$. Dies stimmt mit $G = \frac{1}{1-F}$ für den geladenen Triplett-Korrelator $\langle(\pi^\pm)(\pi^\pm)\rangle$ überein — wie es sein muß. Im Singulett Fall erhalten wir $C^s = K + H = -\frac{1}{1+F}$.

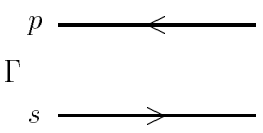
Die Verallgemeinerung auf N_f Flavors bringt keinerlei Schwierigkeiten mit sich. Fügt man Propagatoren in (4.8) an die externen Beine an, so erhalten wir unser Endergebnis für die verbundenen 4-Punkt-Funktionen

$$\begin{aligned}\Pi^{conn}_{\Gamma\Gamma'}(p,s,q,r) &= -\frac{N_c}{n_R}\sqrt{M_pM_qM_rM_s}\big[C_0(t)\mathrm{tr}_D(S(s)\Gamma S(p))\mathrm{tr}_D(S(q)\Gamma S(r)) + \\ &\quad C_5(t)\mathrm{tr}_D(S(s)\Gamma S(p)\gamma_5)\mathrm{tr}_D(S(q)\Gamma S(r)\gamma_5)\big]\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}C^s_{0/5}(t) &= -\frac{N_f - 1}{(N_f-1)F_{0/5}(t) + 1} \quad \text{für den Singulett-Korrelator} \\ C^t_{0/5}(t) &= -\frac{1}{F_{0/5}(t) \pm 1} \qquad\qquad \text{für nicht-Singulett-Korrelatoren}\end{aligned} \tag{4.16}$$

$F_{0/5}(t)$ sind in (4.10) definiert. Korrelatoren gemischter Flavor-Struktur, wie z.B. zwischen einem Singulett- und einem Triplett-Strom, sind wie zu erwarten Null.

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Formeln für die unverbundenen Anteile der 4-Punkt-Funktionen an. Folgende Graphen können, abhängig von der Flavorstruktur, beitragen:



$$= N_c\mathrm{tr}_D(\Gamma S(p)\Gamma' S(s))\delta(p-q)\delta(r-s) \tag{4.17}$$

Man beachte, daß der zweite zwei-Schleifen-Term von der Odnung N_c^2 ist. In den meisten Anwendungen fällt dieser Term heraus oder trägt als uninteressante Konstante bei.

Für den Nicht-Singulett und Singulett Fall erhält man:

$$\bar{\delta}(p-s+q-r)\Pi^{free}_{\Gamma\Gamma'}(p,s,q,r) = \tag{4.18}$$

$$= N_c \mathrm{tr}_D(\Gamma S(p)\Gamma' S(s))\bar{\delta}(p-q)\bar{\delta}(r-s) + \begin{cases} 0 & \text{für Nicht-Singulett} \\ N_f \cdot (4.17b) & \text{für Singulett} \end{cases}$$

4.5 Zusammenfassung

Die 4-Punkt-Quark-Korrelatoren wurden im Instanton-Flüssigkeits-Modell in Nullmoden Approximation und in $1/N_c$ Entwicklung berechnet. Die $1/N_c$ Entwicklung ist der Ersatz für die Dichte-Entwicklung, die in Anwesenheit leichter Quarks versagt. Die Arbeit [25] wurde um die Hinzunahme dynamischer Quarks erweitert. Im Gegensatz zur ursprünglichen "störungstheoretischen" $1/N_c$ Entwicklung [62] sind nicht alle Quark-Schleifen unterdrückt. Im Flavor-Singulett-Meson-Korrelator überlebt eine Kette von Quark-Schleifen den $N_c \to \infty$ Limes. Die hier gewonnenen Ausdrücke für die 4-Punkt-Funktionen werden im folgenden Kapitel diskutiert.

Kapitel 5

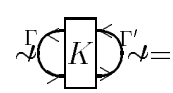
Korrelatoren leichter Mesonen

Die Meson-Korrelatoren, auch Polarisationsfunktionen genannt, enthalten Information über das Meson-Spektrum der QCD. Pole bei $p^2 = m^2$ zeigen die Existenz von Mesonen der Masse m an. Mit den im Instanton-Flüssigkeits-Modell berechneten 4-Punkt-Funktionen (↑Kapitel 4) stehen uns auch die Meson-Korrelatoren analytisch, bis auf Integration, zur Verfügung (Abschnitt 5.1). In Abschnitt 5.2 werden diese kurz diskutiert, wobei der pseudoskalare Kanal von besonderem Interesse ist. Aufgrund der chiralen Symmetriebrechung gibt es im Triplett-Kanal masselose Goldstone-Bosonen, im Singulett-Kanal hingegen nicht, da Instantonen die $U(1)_A$-Symmetrie explizit brechen. Beide Phänomene besitzen ein Analogon in der Supraleitung. Um die Meson-Massen zu berechnen, wird in Abschnitt 5.3 ein Ansatz für das Meson-Spektrum gemacht. Vergleich der theoretischen Kurve mit diesem Ansatz in Abschnitt 5.4 ermöglicht die Bestimmung der Massen der leichtesten Mesonen in den verschiedenen Kanälen. Die Auswertung der Integrale und der Angleich erfolgen numerisch.

5.1 Analytische Ausdrücke

Im letzten Kapitel haben wir einige Quark-vier-Punkt Funktionen berechnet (4.2). Die Meson-Korrelatoren sind lokale Versionen dieser Vertices und können einfach gewonnen werden, indem man $x = y$ und $z = w$ setzt. Im Impulsraum haben die Meson-Korrelatoren im Falle zweier Quark-Flavors ($N_f = 2$) die Form

$$\Pi_{\Gamma\Gamma'}(t) = \Pi^{free}(t) + \Pi^{conn}(t) = \tag{5.1}$$



$$= \int (dpds) \int (dqdr) \Pi(p,s,q,r) = - \int dx\, e^{itx} \langle 0 | \mathcal{T} j_\Gamma(x) j_{\Gamma'}(0) | 0 \rangle \quad ,$$

$$j_\Gamma^{s/t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}\Gamma u(x) \pm \bar{d}\Gamma d(x)) \quad , \quad j_{\Gamma'}^{s/t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{u}\Gamma' u(0) \pm \bar{d}\Gamma' d(0)) \quad ,$$

$$\int (dpds) = \int đp đs\, \delta(p - s - t) \quad , \quad \int (dqdr) = \int đq đr\, \delta(q - r - t) \quad ,$$

$$t = p - s = q - r \quad .$$

Durch Einsetzen der im letzten Kapitel berechneten vier-Punkt-Funktionen erhält man, bis auf Integration, analytische Ausdrücke für die Meson-Korrelatoren. Die folgende Liste ist eine Zusammenfassung aller Formeln, die zur Berechnung der Meson-Korrelatoren benötigt werden:

$$\begin{aligned}
\Pi^{free}_{\Gamma\Gamma'}(t) &= N_c \int (dpds)\, \mathrm{tr}_D(\Gamma S(p)\Gamma' S(s)) \quad , \\
\Pi^{conn}_{\Gamma\Gamma'}(t) &= -N_c(C_0(t)\Gamma^0_\Gamma(t)\Gamma^0_{\Gamma'}(t) + C_5(t)\Gamma^5_\Gamma(t)\Gamma^5_{\Gamma'}(t)) \quad , \\
C_{0/5}(t) &= -\frac{1}{F_{0/5}(t) \pm 1} \quad \begin{cases} + \text{ für den Singulett-Korrelator} \\ - \text{ für den Triplett-Korrelator} \end{cases} \quad , \\
\Gamma^0_\Gamma(t) &= \frac{1}{\sqrt{n_R}} \int (dpds)\, \sqrt{M_p M_s}\mathrm{tr}_D(S(p)\Gamma S(s)) \quad , \\
\Gamma^5_\Gamma(t) &= \frac{1}{\sqrt{n_R}} \int (dpds)\, \sqrt{M_p M_s}\mathrm{tr}_D(S(p)\Gamma S(s)\gamma_5) \quad , \\
F_0(t) &= \frac{-1}{n_R} \int (dpds)\, M_p M_s \mathrm{tr}_D(S(p)S(s)) \quad , \\
F_5(t) &= \frac{-1}{n_R} \int (dpds)\, M_p M_s \mathrm{tr}_D(S(p)\gamma_5 S(s)\gamma_5) \quad , \\
S(p) &= \frac{1}{\not{p} + i(m + M_p)} \quad , \quad M_p = \frac{n_R}{2\mu} p^2 \varphi^2_{sing}(p) \quad , \\
p\varphi_{sing}(p) &= 2\pi\rho z \frac{\partial}{\partial z}[I_0(z)K_0(z) - I_1(z)K_1(z)]_{z=p\rho/2} \quad , \\
\mu &= m + \int d^4p \, \frac{2\varphi^2_{sing}(p) M_p}{p^2 + (m + M_p)^2}(p^2 + m(m + M_p)) \quad , \\
n_R N_c &= (200\mathrm{MeV})^4 \quad , \quad \rho = (600\mathrm{MeV})^{-1} \quad .
\end{aligned} \tag{5.2, 5.3}$$

5.2 Analytische Ergebnisse

Führt man die Dirac-Spur aus, so gelangt man zu folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned}
F_{0/5}(t) &= -\frac{4}{n_R} \int (dpds) \frac{M_p M_s(\pm(ps) - \tilde{M}_p\tilde{M}_s)}{(p^2 + \tilde{M}_p^2)(s^2 + \tilde{M}_s^2)} \quad , \\
\Gamma^{0/5}_{1/5}(t) &= \frac{4}{\sqrt{n_R}} \int (dpds) \frac{\sqrt{M_p M_s}(\pm(ps) - \tilde{M}_p\tilde{M}_s)}{(p^2 + \tilde{M}_p^2)(s^2 + \tilde{M}_s^2)} \quad , \\
\Gamma^5_{\mu 5}(t) &= \frac{4i}{\sqrt{n_R}} \int (dpds) \frac{\sqrt{M_p M_s}(\tilde{M}_p s_\mu - \tilde{M}_s p_\mu)}{(p^2 + \tilde{M}_p^2)(s^2 + \tilde{M}_s^2)} \quad , \\
\tilde{M}_p &= m + M_p
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Alle anderen Vertizes Γ sind Null. Betrachte den ein-Instanton-Vertex (4.7) (den Integralkern). Er trägt nur zum skalaren und pseudoskalaren Korrelator bei. Schon aus dieser

Beobachtung kann man vorhersagen, daß der verbundene Teil aller anderen Kanäle klein ist, da ein potentieller Beitrag ein Multi-Instanton-Effekt sein muß. In der Tat sind die verbundenen Vektor- und Tensor-Korrelatoren identisch Null. Aufgrund eines Extra-Faktors $M \sim \sqrt{n_R}$ im Zähler von $\Gamma^5_{\mu 5}$ ist der verbundene Teil des axialen Korrelators mit $O(n_R)$ unterdrückt. Folglich ist dieser Beitrag klein und wird im folgenden vernachlässigt.

Weiterhin werden wir uns auf den *chiralen Limes* beschränken und setzen im folgenden $m = 0$. Mithilfe der Selbstkonsistenz-Gleichung (5.3) sieht man, daß

$$F_5(t = 0) = 1 \tag{5.5}$$

Dies verursacht einen Pol bei $t = 0$ im pseudoskalaren Triplett-Korrelator wegen des Faktors $F_5(t) - 1$ im Nenner von (5.2) und erzeugt die masselosen Goldstone-Pionen, welches man im chiralen Limes erwartet. Eine ausführlichere Diskussion kann in [25] gefunden werden. Im Gegensatz hierzu ist im Singulett-Korrelator das Minuszeichen durch ein Pluszeichen ersetzt und man erhält in diesem Kanal kein Goldstone-Boson, d.h. das (zwei-Flavor) η' Meson ist massiv! Unglücklicherweise können wir auf diese Weise die η' Masse nicht zuverlässig vorhersagen, da der Integralkern in diesem Kanal stark abstoßend ist und sich kein Bindungszustand ausbildet (vgl. Abschnitt 6.1). Andere attraktive Kräfte müssen vorhanden sein, z.B. Confinement-Kräfte, um ein η' zu formieren. Etwas ähnliches geschieht im skalaren Triplett-Kanal (δ) (vergleiche Abbildung B.4 und B.5). Tatsächlich sind die experimentellen Massen von η' und δ entartet. Das Fehlen eines masselosen pseudoskalaren Singulett-Mesons ist eine bedeutende Vorhersage der Instanton-Physik und trägt entscheidend zur Lösung des $U(1)_A$-Problems bei.

Beide Phänomene haben ihr Analogon in der BCS-Theorie der Supraleitung als masselose Exzitonen bzw. massive Plasma-Oszillationen. Sowohl die Phänomene als auch die Struktur der Rechnung lassen sich nahezu 1:1 aufeinander abbilden. Dem 't Hooft Vertex entspricht die Phonon-Elektron-Wechselwirkung. Weitere Parallelen lassen sich der Tabelle 5.1 entnehmen. Eine Einführung in die BCS-Theorie findet sich in [60].

Eine interessante Feststellung ist, daß in führender Ordnung in der Instanton-Dichte $F_0(t) = -F_5(t)$ gilt, was zu einem masselosen Pol im skalaren Singulett-Korrelator führt. Numerisch stellt sich das σ-Meson in der Tat als sehr leicht heraus. Experimentell scheint ein leichtes skalares Singulett-Meson nicht ausgeschlossen werden zu können.

5.3 Spektral-Darstellung

Um phänomenologische Information aus den Meson-Korrelatoren zu ziehen, machen wir Gebrauch von der Spektraldarstellung

$$\Pi(p) = \int d^4x\, e^{ipx} \langle 0|\mathcal{T}\, j_\Gamma(x) j_{\Gamma'}(0)|0\rangle = \int_0^\infty d\sigma^2\, D(\sigma, x)\rho(\sigma^2) \tag{5.6}$$

wobei

$$\rho(p^2) = (2\pi)^3 \sum_n \delta^4(p - q_n)\langle 0|j_\Gamma(0)|n\rangle\langle n|j'_\Gamma(0)|0\rangle \tag{5.7}$$

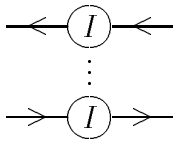
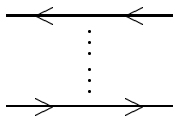
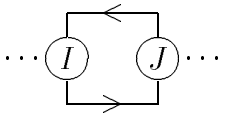
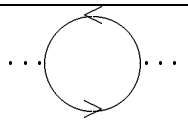
	Instantonen in der QCD	**BCS-Theorie**
Phänomen	Chirale Symm.-Brechung	Supraleitung
Bindungszustände ...	$\bar{q}q$-Paare=π-Mesonen	e^-e^--Paare=Cooper-Paare
geb. durch attraktive ...	instanton-induzierte 't Hooft Wechselwirkung 	Phonon-Elektron-Wechselwirkung 
im ...	pseudo-skalaren Kanal	skalaren Kanal
Ordnungsparameter	Quark-Kondensat $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$	Dichte supraleitender Elektronen (Cooper-Paare) $\langle\rho\rangle$
Spontane Brechung der	chiralen Symmetrie	Eich-Symmetrie
führt zu ...	Goldstone-Bosonen = masselose Pionen	Exzitonen = masselose Dichte-Flukt.
Vakuum-Polrisations-Diagramme machen die masselosen Anregungen massiv	 im flavor Singulett-Fall $\Longrightarrow$ massives η'	 für die Coulomb-WW $\Longrightarrow$ massive Plasma-Osz.

Tabelle 5.1: *Analogie zwischen chiraler Symmetrie-Brechung in der QCD und der BCS-Theorie der Supraleitung*

die Spektraldichte und

$$D(m,x) = \int \bar{d}^4 p \frac{e^{-ipx}}{p^2+m^2} = \frac{1}{4\pi^2 x^2}(mx)K_1(mx) \tag{5.8}$$

der freie Propagator zur Masse m in Ortsdarstellung sind. Wir werden Π im Ortsraum darstellen, um einen Vergleich mit der Gitter-QCD und numerischen Studien zur Instanton-Flüssigkeit [28] zu ermöglichen.

Das Spektrum besteht aus mesonischen Resonanzen und Kontinuum-Beiträgen. Ist man nur an den Eigenschaften der ersten Resonanz interessiert, so kann man den Rest des Spektrums durch das störungstheoretisch berechnete Kontinuum ersetzen.

Man könnte der Meinung sein, daß der unverbundene Teil der Korrelatoren nur zum Kontinuum beiträgt und der verbundene Teil Information über die Bindungszustände enthält, aber dies ist nicht generell der Fall. Auf der einen Seite besitzt die Bethe-Salpeter-Gleichung gebundene wie auch Kontinuums-Lösungen. Betrachten wir auf der anderen Seite eine Theorie mit einer schwachen attraktiven Wechselwirkung zwischen Teilchen der Masse m. Es ist klar, daß in der freien Schleife nur ein Schnitt oberhalb $2m$ und kein Pol eines Bindungszustandes auftritt. In der exakten Polarisations-Funktion wird allerdings nur ein kleiner Teil des Kontinuums in einen Pol knapp unterhalb von $2m$ verwandelt. Der Euklidische Korrelator wird dadurch kaum beeinflußt. Nimmt man nun eine schwache Attraktion, d.h. die Formierung eines Bindungszustandes an, so kann man dessen Masse bereits aus dem unverbundenen Beitrag extrahieren. Natürlich ist in diesem einfachen Beispiel jede Rechnung unnötig. Es ist klar, daß der Bindungszustand eine Masse von ungefähr $2m$ hat mit Fehlern von der Größenordnung der Wechselwirkung.

Nimmt man an, daß alle bisher vernachlässigten Kräfte in der QCD, insbesondere störungstheoretische Korrekturen, klein und attraktiv im Vektor- und Axialvektor-Kanal sind, so können wir die Massen der Bindungszustände bestimmen, obwohl im Rahmen unserer Approximation kein verbundener Teil existiert. Im Gegensatz zu obigem Beispiel sind die Verhältnisse hier weniger trivial, da die Quarks keine scharfe Polmasse besitzen. Wir müssen den Korrelator also inspizieren, um die Meson-Massen zu extrahieren.

Beginnen wir mit dem skalaren und dem pseudoskalaren Korrelator. Das leichteste Meson der Masse m_* ist mit der Stärke

$$\lambda_* = \langle 0|j_{1/5}(0)|p\rangle \quad . \tag{5.9}$$

an den Strom gekoppelt. Der Rest des Spektrums wird durch den Kontinuum-Beitrag oberhalb der Schwelle E_* angenähert. * bedeutet π, η, δ oder σ (↑Tabelle 5.2). E_* ist typischerweise von der Ordnung 1.5 GeV. Somit kann das Kontinuum mittels Störungstheorie berechnet werden. Unser Ansatz für das Spektrum hat die Form

$$\rho_{1/5}(s) = \lambda_*^2 \delta(s-m_*^2) + \frac{3s}{8\pi^2}\Theta(s-E_*^2) \quad . \tag{5.10}$$

Einsetzen der Spektraldichte ρ in (5.6) ergibt

$$\Pi_{1/5}^{fit}(x) = \lambda_*^2 D(m_*,x) + E(E_*,x) \quad , \tag{5.11}$$

Korrelator		$\Gamma = \Gamma'$	I=1	I=0
Pseudoskalar	$\Pi_5 = \langle j_5 j_5 \rangle$	$i\gamma_5$	π	η'
Skalar	$\Pi_1 = \langle j_1 j_1 \rangle$	$\mathbb{1}_D$	δ	σ
Vektor	$\Pi_{\mu\mu} = \langle j_\mu j_\mu \rangle$	γ_μ	ρ	ω
Axialvektor	$\Pi^5_{\mu\mu} = \langle j^5_\mu j^5_\mu \rangle$	$\gamma_\mu\gamma_5$	a_1	f_1

Tabelle 5.2: *Meson-Korrelatoren*

$$E(E_*, x) = \frac{3}{\pi^4 x^6}\frac{(E_* x)^3}{16}(2K_3(E_* x) + (E_* x)K_2(E_* x)) \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{3}{\pi^4 x^6} \quad . \tag{5.12}$$

Im nächsten Abschnitt werden m_*, λ_* und E_* bestimmt, indem der phänomenologische Ansatz $\Pi^{fit}(x)$ an die theoretische Kurve $\Pi^{sum}(x)$ in einem Euklidischen Bereich angepaßt wird, in dem die theoretische Berechnung zuverlässig ist.

Betrachten wir nun den Vektor- und den Axialvektor-Korrelator. Der Vektor-Strom ist erhalten, der Korrelator ist somit transversal und nur die Vektormesonen können beitragen. Im chiralen Limes gilt gleiches für den axialen Strom. Im axialen Singulett-Kanal muß sorgfältig zwischen zwei Strömen unterschieden werden, einem erhaltenen und einem eichinvarianten, der die Anomalie enthält. In führender Ordnung in der Instanton-Dichte stimmen die Korrelatoren beider Ströme überein und sollten erhalten sein.

Für erhaltene Vektor- und Axialvektor-Ströme ist die Spektralfunktion transversal:

$$\rho^{(5)}_{\mu\nu}(p^2) = (-\delta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2})\rho^{(5)}_T(p^2) \quad . \tag{5.13}$$

Die Kopplung des Vektor- und des Axialvektor-Mesons an den Strom ist durch

$$i\lambda_* \epsilon_\mu = \langle 0|j^{(5)}_\mu(0)|p\rangle \tag{5.14}$$

gegeben, wobei ϵ_μ die Meson-Polarisation ist. Die Spektral- und Polarisations-Funktionen haben die Form

$$\begin{aligned} -\rho^{(5)}_{\mu\mu}(s) &= 3\lambda_*^2\delta(s - m_*^2) + \frac{3s}{4\pi^2}\Theta(s - E_*^2) \quad , \\ -\Pi^{fit(5)}_{\mu\mu}(x) &= 3\lambda_*^2 D(m_*, x) + 2E(E_*, x) \quad . \end{aligned} \tag{5.15}$$

* ist hier ρ, ω, a_1 oder f_1 (↑Tabelle 5.2).

5.4 Plot & Fit der Meson-Korrelatoren

Die Meson-Korrelatoren sind in Abbildung B.3 - B.8 dargestellt, normiert auf die Korrelatoren in niedrigster Ordnung Störungstheorie:

$$\Pi^0_{1/5}(x) = \frac{3}{\pi^4 x^6} \quad , \quad \Pi^{0(5)}_{\mu\mu} = -\frac{6}{\pi^4 x^6} \tag{5.16}$$

Sie zeigen also die Abweichung vom störungstheoretischen Verhalten. Die numerische Berechnung der Integrale ist in Anhang A.4 und A.5 diskutiert. Die Meson-Parameter, die durch Anpassen des Parameter-Ansatzes an die theoretische Kurve gewonnen wurden, sind in Tabelle 5.3 zusammengestellt. Shuryak&Verbaarshot [28] bestimmten dieselben Parameter mit Hilfe numerischer Studien der Instanton-Flüssigkeit. Deren Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 5.3 aufgeführt. Die Parameter im Vektor- und Axialvektor-Kanal stimmen sehr gut mit unseren Ergebnissen überein. Für das π- und das σ-Meson gibt es große Diskrepanzen in der Masse, aber das ist nicht verwunderlich: Wir betrachteten den chiralen Limes, in dem die Pionen masselos sind. Ein ähnliches Argument gilt für das σ-Meson. Die Kopplungen stimmen gut überein.

Die Diskrepanz im Axialvektor-Kanal kann verschiedene Ursachen haben, die zur Zeit untersucht werden. Man kann auch direkt die Graphen vergleichen. Sie stimmen selbst in den Fällen, in denen ein spektraler Fit nicht funktioniert, wie dem δ und η' Kanal, mit [28] recht gut überein. Aus alledem läßt sich schließen, daß die Terme, die in unserer semi-analytischen Behandlung vernachlässigt wurden, aber in den numerischen Studien berücksichtigt wurden, klein sind und Korrekturen unterhalb 10% darstellen. Dies sind Beiträge der nicht-Nullmoden und Korrekturen höherer Ordnung in $1/N_c$. Erneut tritt die erstaunlich hohe Genauigkeit der $1/N_c$ Entwicklung zutage. Im Falle von Strange-Quarks werden die Beiträge der nicht-Nulllmoden wichtiger.

Zum Schluß sollte man die Werte mit dem Experiment vergleichen. Soweit bekannt, sind diese Zahlen in Tabelle 5.3 aufgenommen. Eine ausführlichere Diskussion der Meson-Korrelatoren und der Vergleich mit den experimentellen Daten kann in [28] gefunden werden.

Meson	$I^G(J^{PC})$	m_*[MeV]	$\sqrt{\lambda_*}$[MeV]	E_*[MeV]	Quelle
		0	508±1	1276±33	$1/N_c$
π	$1^-(0^{-+})$	142±14	510±20	1360±100	Simulation
		138	480	—	Experiment
		$\neq 0$	?	?	$1/N_c$
η'	$0^+(0^{-+})$	$\neq 0$	?	?	Simulation
		960	?	—	Experiment
		$\neq 0$	?	?	$1/N_c$
δ	$1^-(0^{++})$	$\neq 0$	?	?	Simulation
		970	?	—	Experiment
		433±3	506±3	1446±20	$1/N_c$
σ	$0^+(0^{++})$	543	500	1160	Simulation
		?	?	—	Experiment
		930±5	408±4	1455±33	$1/N_c$
ρ	$1^+(1^{--})$	950±100	390±20	1500±100	Simulation
		780	409±5	—	Experiment
		930±5	408±4	1455±33	$1/N_c$
ω	$0^-(1^{--})$	?	?	?	Simulation
		780	390±5	—	Experiment
		1350±200	370±30	1050±80	$1/N_c$
a_1	$1^-(1^{++})$	1132±50	305±20	1100±50	Simulation
		1260	400	—	Experiment
		1350±200	370±30	1050±80	$1/N_c$
f_1	$0^+(1^{++})$	1210±50	293±20	1200±50	Simulation
		1285	?	—	Experiment

Tabelle 5.3: *Meson-Masse m_*, Kopplungs-Konstante λ_* und Kontinuum-Schwelle E_*. berechnet im Rahmen des Instanton-Flüssigkeit-Modells: a) in dieser Arbeit ($1/N_c$), b) aus numerischen Simulationen und c) vom Experiment.*

Kapitel 6

Die axiale Anomalie

Mit Hilfe des Instanton-Flüssigkeit-Modells können, bzgl. der chiralen Symmetrie-Brechung, eine Reihe von Vorhersagen gemacht werden. Obwohl die 't Hooft Wechselwirkung [17] die axiale $U(1)$ Symmetrie explizit bricht, sind Instanton-Modelle bis jetzt nicht sehr erfolgreich beim Beschreiben des axialen Flavor-Singulett-Kanals. Die interessantesten Größen in diesem Zusammenhang sind die η' Masse und der Spin des Protons.

In Abschnitt 6.1 wird $m_{\eta'}$ durch Verknüpfen verschiedener Techniken berechnet. Das Ergebnis hängt nicht von spezifischen Besonderheiten der Instanton-Physik ab.

Die Abschnitte 6.2, 6.3 und 6.4 führen in das Proton-Spin-Problem ein. In Abschnitt 6.5 werden die Proton Formfaktoren unter Annahme unabhängiger Konstituenten-Quarks auf Vakuum-Korrelatoren bestehend aus 4 Quark-Feldern zurückgeführt. Die axialen Singulett-Quark und -Gluon Formfaktoren werden in Abschnitt 6.6, 6.7 und 6.8 berechnet, wobei auf den Propagator und die 4-Punkt-Funktionen zurückgegriffen wird, die im Instanton-Flüssigkeits-Modell berechnet wurden. Die Eich(un)abhängigkeit wird ebenfalls untersucht. Eine Disukussion der Resultate und ein Vergleich mit [53] finden sich in Abschnitt 6.9.

In den Abschnitten 6.2-6.5 wird ausnahmsweise die Minkowski-Notation verwendet.

6.1 Die Masse des η' Mesons

In vielen Kanälen führte eine direkte Berechnung der Meson-Korrelatoren im Instanton-Flüssigkeits-Modell und ein spektraler Angleich zu brauchbaren Resultaten für die Massen der leichtesten Mesonen (↑Kapitel 5). Sogar im axialen Triplett-Kanal war diese Methode erfolgreich, da das Modell SBCS korrekt beschreibt. Im axialen Singulett-Kanal verhinderte eine starke Abstoßung die Ausbildung eines Mesons. Das Ergebnis war ein Fehlen eines masselosen Golstone-Bosons in diesem Kanal, aber die Masse des η' konnte nicht bestimmt werden. In diesem Abschnitt wird die Masse des η' durch Verknüpfen verschiedener Methoden berechnet. Mit Hilfe

- von Strom-Algebra-Resultaten für η',
- der $1/N_c$ Entwicklung,
- einem Instanton-Model,
- der Skalen-Anomalie

ist es möglich, die η' Masse mit der Pion-Kopplungskonstante f_π und dem physikalischen Gluon-Kondensat in Beziehung zu setzen.

In führender Ordnung in $1/N_c$ kann $m_{\eta'}$ mit der Θ-Abhängigkeit der QCD-Vakuum-Energie ohne Quarks in Verbindung gebracht werden[1] [43]:

$$m_{\eta'}^2 = \frac{4N_f}{f_\pi^2}\left(\frac{d^2E}{d\Theta^2}\right)_{\Theta=0}^{no\ quarks} \quad , \quad \frac{d^2E}{d\Theta^2} = \int d^4x\ \langle 0|\mathcal{T}Q(x)Q(0)|0\rangle_{conn} \tag{6.1}$$

$$Q(x) = \frac{\alpha_s}{4\pi}\mathrm{tr}_c G\tilde{G}(x) \quad , \quad Q = \int d^4x\, Q(x) \in \mathbb{Z}$$

$Q(x)$ ist die topologische Ladungsdichte und Q die Gesamt-Ladung. Folgende Argumente gehen in die Herleitung ein: Für große N_c ist die topologische Suszeptibilität $d^2E/d\Theta^2$ durch das η' dominiert. Ausnutzen der axialen Anomalie und der Relation $f_\pi = f_{\eta'}$, die für $N_c \to \infty$ exakt ist, führt zur Witten-Formel (6.1).

Der nächste Schritt ist, die topologische Suszeptibilität auf das Gluon-Kondensat $\langle 0|N(0)|0\rangle$ zurückzuführen

$$N(x) = \frac{\alpha_s}{4\pi}\mathrm{tr}_c GG(x) \quad , \quad N = \int d^4x\, N(x)$$

Betrachten wir zunächst die exakten N-Instanton-Lösungen ($Q = N$). Sie sind selbstdual ($G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}$) und folglich gilt

$$\langle 0|\mathcal{T}Q(x)Q(0)|0\rangle_{conn} = \langle 0|\mathcal{T}N(x)N(0)|0\rangle_{conn} \quad . \tag{6.2}$$

Die exakten Anti-Instanton-Lösungen ($Q = -N$) sind anti-selbstdual ($G_{\mu\nu} = -\tilde{G}_{\mu\nu}$) und (6.2) gilt ebenfalls, da sich die zwei Minuszeichen gegenseitig aufheben. Unglücklicherweise sind die exakten Lösungen nicht die wichtigsten Beiträge zur Zustandssumme.

Die dominierenden Konfigurationen sind Instantonen und Anti-Instantonen in gemischter Form. Das einfachste Modell ist eine verdünnte Summe $A = \sum_I A_I$ von Instantonen gemischter Ladung. In diesem Hintergrund ist $G_{\mu\nu}$ ungefähr selbstdual in der Nähe der Instanton-Zentren, ungefähr anti-selbstdual in der Nähe der Anti-Instanton-Zentren und klein weit weg jeden Instantons. In führender Ordnung in der Instanton-Dichte ist

$$G_{\mu\nu}(x) = \pm\tilde{G}_{\mu\nu}(x) \tag{6.3}$$

wobei das Vorzeichen jetzt von x abhängig ist! Ohne weitere Annahmen kann (6.2) für $x \neq 0$ nicht mehr bewiesen werden.

[1] $\langle AB\rangle_{conn} = \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$

Sei $N_\pm(x)$ wie folgt definiert:

$$N(x) = N_+(x) + N_-(x) \quad , \quad Q(x) = N_+(x) - N_-(x)$$

$N_+(x)$ hat die Gestalt einer Summe von Hügeln in der Nähe der Instanton-Zentren und $N_-(x)$ in der Nähe der Anti-Instanton-Zentren. (6.2) muß durch

$$\langle 0|\mathcal{T}Q(x)Q(0)|0\rangle_{conn} = \langle 0|\mathcal{T}N(x)N(0)|0\rangle_{conn} - 4\langle 0|\mathcal{T}N_+(x)N_-(0)|0\rangle_{conn} \tag{6.4}$$

ersetzt werden. Nimmt man die Unabhängigkeit der Instantonen von den Anti-Instantonen an ($\langle N_+N_-\rangle = \langle N_+\rangle\langle N_-\rangle$) reduziert sich diese Gleichung erneut zu (6.2).

Die nächste Zutat ist das Skalenverhalten der QCD. Die klassische Chromodynamik ist skaleninvariant und das Noether-Theorem führt zu einem erhaltenen Strom. In der Quantentheorie ist die Skaleninvarianz anomal gebrochen (wie die axiale Singulett-Symmetrie). Ward-Identitäten können hergeleitet werden, insbesondere [64]

$$\int d^4x\ \langle 0|\mathcal{T}N(x)N(0)|0\rangle_{conn} = \frac{4}{b}\langle 0|N(0)|0\rangle \quad , \quad b = \frac{11}{3}N_c \tag{6.5}$$

In einem (anti)selbstdualen Hintergrund ist die topologische Suszeptibilität somit proportional zum Gluon-Kondensat [21]:

$$\frac{d^2E}{d\Theta^2} = \frac{4}{b}\langle 0|N(0)|0\rangle \tag{6.6}$$

Die Gleichung bleibt gültig, wenn das QCD-Vakuum durch statistisch unabhängige selbstduale und anti-selbstduale Bereiche dominiert wird, wie oben gezeigt wurde. In der Tat genügt die Unabhängigkeit der totalen Instanton/Anti-Instanton-Zahl $N_\pm$. (6.6) habe ich unter Verwendung der 1-Schleifen Instanton-Dichte $D(\rho)$ [17] direkt überprüft. Nur die ρ Abhängigkeit $D(\rho) \sim \rho^{-5}(\rho\Lambda)^b$ ist von Bedeutung. Aufgrund der Infrarot-Divergenz ist es nötig, einen Cutoff einzuführen. Dabei darf das Skalenverhalten nicht zerstört werden. Eine minimale Änderung ist, Cutoffs $f_\pm$ in der totalen Instanton/Anti-Instanton Packungsdichte einzuführen. Die Packungsdichte ist der Bruchteil des durch Instantonen besetzten Raumzeit-Volumens und ist dimensionslos. Skaleninvarianz und die Unabhängigkeit von Instantonen und Anti-Instantonen sind gewährleistet. Die Zustandssumme lautet

$$Z = \sum_{N_+N_-} Z^+_{N_+} Z^-_{N_-} \tag{6.7}$$

$$Z^\pm_{N_\pm} = \frac{V_4^{N_\pm}}{N_\pm!}\int_0^\infty d\rho_1 \ldots d\rho_{N_\pm}\, D(\rho_1)\ldots D(\rho_{N_\pm})\,\Theta\left(f_\pm - \frac{1}{V_4}\sum_{i=1}^{N_\pm}\rho_i^4\right)$$

Eine längere Rechnung im thermodynamischen Limes $V_4 \to \infty$ ergibt

$$Z^\pm_{N_\pm} = \left(\frac{c_\pm N_\pm}{V_4\Lambda^4}\right)^{-\frac{b}{4}N_\pm}$$

wobei $c_\pm = c_\pm(f_\pm, b)$ von $N_\pm$ unabängige Konstanten sind. Zweimaliges Ableiten von $\ln Z$ nach $\ln c_\pm$ führt zu (6.6). Das Ergebnis ist unabhängig von $f_\pm$.

Eine attraktive Wechelwirkung würde die Suszeptibilität verkleinern (im Vergleich mit der Dichte). Dies kann man wie folgt sehen: Im extremen Fall einer sehr starken Attraktion sind alle Instantonen in Instanton-Anti-Instanton Molekülen gebunden, damit ist $N_+ = N_-$ und $Q \equiv 0$. Auf der anderen Seite erhöht eine abstoßende Wechselwirkung die Suszeptibilität:

$$\frac{d^2E}{d\Theta^2} < \frac{4}{b}\langle 0|N(0)|0\rangle \quad \text{für attraktive } I\overline{I} \text{ Wechseleirkung} \tag{6.8}$$

$$\frac{d^2E}{d\Theta^2} > \frac{4}{b}\langle 0|N(0)|0\rangle \quad \text{für repulsive } I\overline{I} \text{ Wechselwirkung} \tag{6.9}$$

Die Verletzung von (6.6) kann als Maß für die $I\overline{I}$ Wechselwirkung verwendet werden.

In [25] wurde ein einfacher Summen-Ansatz $A = \sum A_I$ gemacht, wobei die daraus resultierende Wechselwirkung *nicht* vernachlässigt wurde. Eine zu (6.6) ähnliche Relation wurde hergeleitet, aber ohne den Faktor $4/b$. Das Ergebnis selbst und ein Vergleich mit (6.9) zeigt, daß eine abstoßende Kraft am Werk ist. Verbaarshot [20] hat gezeigt, daß diese Abstoßung ein Artefakt des einfachen Summen-Ansatzes ist. Unter Verwendung des genaueren und komplizierteren Stromlinien-Ansatzes konnte er zeigen, daß die Wechselwirkung stark von der relativen Orientierung der Instantonen abhängt und die gemittelte Wechselwirkung um den Faktor 14 kleiner ist als in [25]. Das beste was man zur Zeit tun kann, ist, überhaupt keine Wechselwirkung anzunehmen und die Packungsdichte bei einem kleinen Wert abzuschneiden.

Es gibt ein allgemeineres Argument, warum die Relation in [25] falsch sein muß. Die topologische Suszeptibilität ist von der Ordnung $O(N_c^0)$, während das Gluon-Kondensat $O(N_c)$ ist. (6.6) ist konsistent mit $N_c \to \infty$ Betrachtungen aufgrund des Faktors $4/b$.

Wir fahren nun fort mit der Berechnung von $m_{\eta'}$. Das physikalische Gluon-Kondensat ist

$$\langle 0|N(0)|0\rangle_{phys} = n_R N_c = (200\text{MeV})^4 \quad . \tag{6.10}$$

Durch die Anwesenheit leichter Quarks ist es um den Faktor $\alpha < 1$ reduziert

$$\langle 0|N(0)|0\rangle_{phys} = \alpha \langle 0|N(0)|0\rangle_{\Theta=0}^{no\ quarks} \tag{6.11}$$

Wir erhalten folgende Formel für die η' Masse

$$m_{\eta'}^2 = \frac{4N_f}{f_\pi^2}\frac{12}{11\alpha}n_R \tag{6.12}$$

Wie man sieht, ist $m_{\eta'}^2 \sim 1/N_c$, da $f_\pi^2 \sim N_c$ und n_R und α unabhängig von N_c sind. Die größte Unsicherheit liegt in der Bestimmung von α. Verwendet man erneut das Instanton-Modell, so ist α die Determinante des Dirac-Operators, wobei die Strom-Massen durch effektive Massen ersetzt werden müssen:

$$\alpha = \prod_{i=u,d,s} 1.34 m_i^{eff}\rho \approx 0.4 \ldots 0.7 \tag{6.13}$$

Die effektiven Massen wurden dabei gleich den Konstituenten-Massen gesetzt

$$m_u^{eff} = m_d^{eff} = 300 \ldots 350 \text{ MeV} \quad , \quad m_s^{eff} = 400 \ldots 500 \text{ MeV} \tag{6.14}$$

und ρ auf den Wert des Instanton-Flüssigkeit-Modells ($\rho = 600$ MeV^{-1}). Diese Schätzung für α ist konsistent mit [21]. Einsetzen von $N_f = 3$ und $f_\pi = 132$ MeV in (6.12) ergibt

$$m_{\eta'} = 884 \pm 116 \text{MeV} \tag{6.15}$$

und ist in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert von 958 MeV. Verwendet man $m_{\eta'}$ als Input, so kann das Gluon-Kondensat der QCD ohne Quarks bestimmt werden

$$\frac{\alpha_s}{4\pi} \langle \text{tr}_c GG \rangle^{no\ quarks} = (246 \text{ MeV})^4 \tag{6.16}$$

wobei wieder $N_f = 3$ gesetzt wurde.

Der Faktor $4/b$ in (6.6) ist wesentlich, um die korrekte N_c Abhängigkeit von $m_{\eta'}$ und Übereinstimmung mit dem Experiment zu erhalten. Die Diskussion hat gezeigt, daß der η'-Kanal im Prinzip eine experimentelle Überprüfung der Unabhängigkeit selbstdualer und anti-selbstdualer Bereiche des QCD-Vakuums ermöglicht, die eine Annahme in den einfachsten Instanton-Modellen ist. Es mag sich eines Tages herausstellen, daß die Details aller Instanton-Modelle falsch sind, aber die Annahme der Unabhängigkeit (anti)selbstdualer Bereiche weiterhin gültig bleibt.

6.2 Messung der axialen Formfaktoren

Die Vorwärts-Matrix-Elemente der axialen Ströme

$$s_\mu \Delta\psi = \langle ps | \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi | ps \rangle \quad , \quad \psi = u, d, s$$

können als Quark-Spin-Beitrag zum Proton interpretiert werden. Diese Interpretation wird in den folgenden Abschnitten präzisiert werden. Drei Linearkombinationen der $\Delta\psi$ sind gemessen worden, was eine Bestimmung ihrer individuellen Werte ermöglicht.

Aus dem β-Zerfall des Neutrons erhält man unter Ausnutzung der Isospin-Invarianz [50, 54]

$$a_3 = g_A = \Delta u - \Delta d = F + D = 1.254 \pm 0.06 \quad .$$

Aus dem β-Zerfall der Oktett-Hyperonen erhält man unter Ausnutzung der $SU(3)_F$-Symmetrie [51, 54]

$$\sqrt{3} a_8 = \Delta u + \Delta d - 2\Delta s = 3F - D = 0.688 \pm 0.0035 \quad .$$

Aus der spin-abhängigen Struktur-Funktion g_1^p des Protons, die von der EMC [48] und der SMC [49] gemessen wurde, kann man

$$\Gamma_p = \int_0^1 g_1^p(x) dx = \frac{4}{9}\Delta u + \frac{1}{9}\Delta d + \frac{1}{9}\Delta s + O(\alpha_s) = 0.142 \pm 0.014 \tag{6.17}$$

extrahieren. Angegeben ist der Welt-Mittelwert.

Von speziellem Interesse ist die Quark-Spin-Summe

$$\Delta\Sigma^{GI} = \sqrt{\frac{3}{2}}a_0 = \Delta u + \Delta d + \Delta s = 0.27 \pm 0.13 \tag{6.18}$$

die aus den oben angegebenen Werten bestimmt werden kann. $O(\alpha_s)$ Korrekturen wurden berücksichtigt. $\Delta\Sigma^{GI}$ weicht signifikant vom naiven Quark-Modell-Wert $\Delta\Sigma_{qm} = 1$ ab. Diese Abweichung ist der Ursprung des sogenannten Spin-Problems. Weiterhin widerspricht die große Polarisation der Strange-Quarks im Proton

$$\Delta s = -0.1 \pm 0.05$$

der Intuition, da dies einen hohen Strange-Quark-Anteil im Proton impliziert.

Wesentlich mehr könnte zur Proton-Spin-Phänomenologie und zur experimentellen Situation gesagt werden. Für eine Einführung und weitere Referenzen siehe [45, 46, 47, 48]. Wir wollen nun eine sorgfältigere Definition und Interpretation von $\Delta\Sigma^{GI}$ und anderen Größen geben, die dann im folgenden im Instanton-Modell berechnet werden.

6.3 Die axialen Singulett-Ströme und die Anomalie

Es ist wohlbekannt, daß Produkte von Operatoren am gleichen Raumzeit-Punkt sehr singuläre Objekte sind. Um die Ausdrücke wohldefiniert zu machen, muß man die Operator-Produkte regularisieren und renormieren. Eine Anomalie tritt auf, falls diese Prozedur eine Symmetrie der Theorie bricht. Die wichtigsten sind die Brechung der Skaleninvarianz und der axialen Symmetrie [64]. Im folgenden wird die axiale Anomalie betrachtet [41]. Das zu regularisierende Operator-Produkt ist der axiale Singulett-Strom,

$$J_{\mu 5}(x) = \sum_{q\in\{u,d,s,\ldots\}} \bar{q}(x)\gamma_\mu\gamma_5 q(x) \tag{6.19}$$

der lokal, eichinvariant und erhalten zu sein scheint[2]. Unglücklicherweise geht nach Regularisierung eine der 3 Eigenschaften unvermeidbar verloren. Folglich können zwei verschiedene lokale Ströme definiert werden, ein erhaltener (c) und ein eichinvarianter (GI). Der dritte eichinvariante, erhaltene und nicht-lokale Strom ist in [42] in Zusammenhang mit dem $U(1)$-Problem diskutiert. Im folgenden wird die Summation über die Quark-Flavors unterdrückt und ψ für den Quark-Feld-Operator geschrieben:

$$\begin{aligned} J^{GI}_{\mu 5}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5 P \exp\left(i\int_x^{x+\varepsilon} dz\cdot A(z)\right)\psi(x) \\ J^{c}_{\mu 5}(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x) \end{aligned} \tag{6.20}$$

[2]Die Terminologie 'erhalten' wird auch für $m_q \neq 0$ verwendet. Dieser Strom wird in der Literatur auch Symmetrie-Strom genannt.

Die Differenz zwischen den beiden Strömen wird durch den Anomalie-Strom K_μ beschrieben:

$$\begin{aligned} K_\mu(x) &= \frac{N_f\alpha_s}{2\pi}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}_c A^\nu(G^{\rho\sigma}-\frac{2}{3}A^\rho A^\sigma) \quad , \quad J^{GI}_{\mu 5} = J^c_{\mu 5} + K_\mu \\ \partial^\mu K_\mu(x) &= \frac{N_f\alpha_s}{2\pi}\mathrm{tr}_c G\tilde{G}(x) = a(x) \\ \partial^\mu J^c_{\mu 5}(x) &= 2mJ_5(x) \qquad , \quad J_5 = i\bar{\psi}\gamma_5\psi \quad . \end{aligned} \tag{6.21}$$

m ist die Strom-Quark-Masse und N_f die Zahl der Flavors. Beachte, daß die Aufteilung von $J_{\mu 5}$ in einen erhaltenen und einen Anomalie-Teil eichabhängig ist. Es gibt Versuche, beide durch physikalische Argumente eindeutig zu definieren [46]. Die Idee ist, $J^c_{\mu 5}$ als naiven Parton-Modell-Spin und K_μ als gluonischen Beitrag zu definieren. Die Proton-Matrix-Elemente der verschiedenen Ströme können durch reelle Formfaktoren G_i, K_i, A und J ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \langle p's'|J^{GI}_{\mu 5}(0)|ps\rangle &= \bar{u}_{s'}(p')\left[\gamma_\mu\gamma_5 G_1^{GI}(q^2) - q_\mu\gamma_5 G_2^{GI}(q^2)\right]u_s(p) \\ \langle p's'|J^c_{\mu 5}(0)|ps\rangle &= \bar{u}_{s'}(p')\left[\gamma_\mu\gamma_5 G_1^c(q^2) - q_\mu\gamma_5 G_2^c(q^2)\right]u_s(p) \\ \langle p's'|K_\mu(0)|ps\rangle &= \bar{u}_{s'}(p')\left[\gamma_\mu\gamma_5 K_1(q^2) - q_\mu\gamma_5 K_2(q^2)\right]u_s(p) \\ \langle p's'|a(0)|ps\rangle &= 2MiA(q^2)\bar{u}_{s'}(p')\gamma_5 u_s(p) \\ \langle p's'|J_5(0)|ps\rangle &= iJ(q^2)\bar{u}_{s'}(p')\gamma_5 u_s(p) \end{aligned} \tag{6.22}$$

M ist die Proton-Masse und $q = p' - p$. (6.21) impliziert folgende Relationen zwischen den Formfaktoren:

$$\begin{aligned} G_1^{GI} &= G_1^c + K_1 \quad , \quad G_2^{GI} = G_2^c + K_2 \\ G_1^c - \frac{q^2}{2M}G_2^c &= \frac{m}{M}J \quad , \quad K_1 - \frac{q^2}{2M}K_2 = A \\ G_1^{GI} - \frac{q^2}{2M}G_2^{GI} &= \frac{m}{M}J + A \quad , \end{aligned} \tag{6.23}$$

wobei alle Formfaktoren bei q auszuwerten sind. Die letzte Gleichung setzt nur eichinvariante Größen in Relation. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, daß der Formfaktor G_1^{GI} bei Impulsübertrag Null mit dem Proton-Spin in Verbindung gebracht werden kann.

6.4 Der Proton-Spin und seine Interpretation

Der Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ ist erhalten ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$), symmetrisch und eichinvariant und kann mit Hilfe des Noether-Theorems konstruiert werden. Der Drehimpuls-Dichte-Tensor $M^{\mu\nu\rho}$ ist assoziiert mit Lorentz-Transformationen und kann durch $T_{\mu\nu}$ ausgedrückt werden:

$$M^{\mu\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} \tag{6.24}$$

M kann in Spin- und Bahnbeitrag der Quarks und der Gluonen zerlegt werden [54]:

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\rho} &= M^{\mu\nu\rho}_{q,orb} + M^{\mu\nu\rho}_{q,spin} + M^{\mu\nu\rho}_{g,orb} + M^{\mu\nu\rho}_{g,spin} - \frac{1}{4}G^2(x^\nu g^{\mu\rho} - x^\rho g^{\mu\nu}) + \partial(\cdots) \\ M^{\mu\nu\rho}_{q,orb} &= \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu(x^\nu\partial^\rho - x^\rho\partial^\nu)\psi \quad , \quad M^{\mu\nu\rho}_{q,spin} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}\gamma_\sigma\gamma_5\psi = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}J^{GI}_{\sigma 5} \\ M^{\mu\nu\rho}_{g,orb} &= -G^{\mu\sigma}(x^\nu\partial^\rho - x^\rho\partial^\nu)A_\sigma \quad , \quad M^{\mu\nu\rho}_{g,spin} = G^{\mu\rho}A^\nu - G^{\mu\nu}A^\rho \end{aligned} \tag{6.25}$$

Die letzten beiden Terme in $M^{\mu\nu\rho}$ tragen nicht zum Drehimpuls-Operator

$$J^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\int d^3x\ M^{0jk}(x) \quad . \tag{6.26}$$

bei. Das Matrix-Element von J_z im Proton-Zustand, wobei das Proton in Ruhe ist und der Spin in z-Richtung zeigt, ist

$$\Delta J = \frac{1}{\mathcal{N}}\langle ps|J_z|ps\rangle = \langle ps|M^{012}(0)|ps\rangle \quad , \quad \mathcal{N} = \langle ps|ps\rangle = \tilde{\delta}^3(0) \tag{6.27}$$

Das Raum-Integral und die Zustands-Norm heben sich gegenseitig auf. Der Gesamt-Spin des Protons ist zweifellos $1/2$ und man erhält die Summenregel

$$\Delta J = \Delta L_q + \frac{1}{2}\Delta\Sigma^{GI} + \Delta L_g + \Delta g = \frac{1}{2} \tag{6.28}$$

wobei $(\Delta L_q, \frac{1}{2}\Delta\Sigma^{GI}, \Delta L_g, \Delta g)$ der (Quark-Bahn, Quark-Spin, Gluon-Bahn, Gluon-Spin) Beitrag zum Proton-Spin sind, definiert als Matrix-Elemente der verschiedenen oben gegebenen Terme von M. Der axiale Strom mißt also den Quark-Spin-Beitrag zum Proton-Spin. In kovarianter Notation erhalten wir:

$$s_\mu\Delta\Sigma^{GI} = \langle ps|J^{GI}_{\mu 5}(0)|ps\rangle \quad \Longrightarrow \quad \Delta\Sigma^{GI} = G^{GI}_1(0) \tag{6.29}$$

Im naiven Quark-Modell besteht das Proton aus drei unabhängigen Quarks in Ruhe. Es gibt keinen Bahn- und keinen Gluon-Beitrag zum Proton-Spin. Dies führt zur Summen-Regel $\Delta J = \frac{1}{2}\Delta\Sigma^{GI} = 1/2$. In der realen Welt ist die Identifizierung von $\Delta\Sigma^{GI}$ mit dem Proton-Spin nicht korrekt, da $J^{GI}_{\mu 5}$ den Spin der (nahezu masselosen) Strom-Quarks mißt, während das Proton aus drei massiven (≈ 300 MeV) Konstituenten-Quarks besteht. Weiterhin sollte in einem Modell nicht-wechselwirkender Konstituenten-Quarks der axiale Strom, der den Konstituenten-Quark-Spin mißt, anomalie-frei sein, da die Anomalie durch die Wechselwirkung mit den Gluonen zustande kommt. Folglich kann vielleicht der erhaltene Strom $J^c_{\mu 5}$ mit dem Konstituenten-Quark-Spin-Operator identifiziert werden.

$$s_\mu\Delta\Sigma^c = \langle ps|J^c_{\mu 5}(0)|ps\rangle \quad \Longrightarrow \quad \Delta\Sigma^c = G^c_1(0) \stackrel{?}{=} 1 \quad . \tag{6.30}$$

Aus (6.23) erhalten wir die Gleichung

$$\Delta\Sigma^{GI} = \Delta\Sigma^c + K_1(0) \tag{6.31}$$

die jetzt wie folgt interpretiert werden kann: Der Spin der Konstituenten-Quarks $\Delta\Sigma^c$ setzt sich aus dem Spin der Strom-Quarks $\Delta\Sigma^{GI}$ und einem Rest $-K_1(0)$ zusammen,

der Bahn- und Gluon-Beiträge enthält. Der Ursprung dieser Beiträge ist *nicht* die Bewegung oder Wechselwirkung der Konstituenten-Quarks im Proton, da die Konstituenten-Quarks im naiven Quark-Modell wechselwirkungsfrei und in Ruhe sind, sondern sie sind Ursache der Formierung massiver Quark aus masselosen Quarks. Folglich kann (6.31) für individuelle "Konstituenten"-Quarks untersucht werden. Weiterhin sind die Gluon-Konfigurationen, die für die Erzeugung der Quark-Masse verantwortlich sind, ebenfalls für den Wert von $K_1(0)$ verantwortlich.

Z.B. entsteht in Bag-Modellen ein massives Quark durch Einschluß eines masselosen Quarks in eine Kugel. Der Spin des massiven Quarks ist die Summe des Spin- $(\frac{1}{2}\Delta\Sigma^{GI})$ und des Bahn- $\frac{1}{2}(1-\Delta\Sigma^{GI})$ Beitrages der Strom-Quarks. Die Bag, könnte z.B. durch nicht-perturbative Gluon-Konfigurationen erzeugt sein. Die Gluonen sind somit sowohl für die Massenerzeugung als auch indirekt für den Bahndrehimpuls der Quarks verantwortlich. Aus analytischen und numerischen Studien weiß man, daß im Bag-Modell der Konstituenten-Spin in 70% Spin und 30% Bahndrehimpuls aufgeteilt ist, falls man von masselosen Quarks ausgeht.

Während (6.31) rigoros gilt, kann die Interpretation von $\frac{1}{2}\Delta\Sigma^c$ als Spin des Konstituenten-Quarks und sein Wert $\frac{1}{2}$ in Frage gestellt werden. Ein Grund dafür ist, daß ein axialer Strom, der massive Konstituenten-Quarks beschreibt, keineswegs erhalten ist, im Widerspruch zu $J^c_{\mu 5}$.

Es gibt eine weitere Relation zwischen $\Delta\Sigma^{GI}$ und dem Formfaktor A bei Impulsübertrag Null. Bevor diese Relation hergeleitet wird, ist es sinnvoll, ein paar Worte über die Reihenfolge von Limites und masselose Pole zu verlieren. Folgende Limites werden gebildet: Das Raumzeitvolumen strebt gegen unendlich ($V_4 \to \infty$), die Strom-Massen gehen gegen Null ($m \to 0$), da die up und down Massen sehr klein sind und $q \to 0$, da wir an den Vorwärts-Matrix-Elementen interessiert sind. Im Prinzip können die Ergebnisse von der Reihenfolge der Limites abhängen. Deshalb ist es wichtig die Reihenfolge konsistent mit der physikalischen Situation zu wählen. D.h., wenn z.B. in der realen Welt $q \ll m$ ist, so muß erst $q \to 0$ and dann $m \to 0$ erfolgen. Da wir an den Vorwärts-Matrix-Elementen interessiert sind ($q \equiv 0$) und $m \neq 0$ in der realen Welt ist, ist die gerade angegebene Reihenfolge korrekt. Aufgrund des Cluster-Theorems gehen verbundene Korrelatoren in Ortsdarstellung gegen Null, falls der Abstand zweier Argumente gegen unendlich geht. Daraus folgt, daß es keine $\delta(q)$-Peaks im Impulsraum gibt und die Reihenfolge der Limites $q \to 0$ und $V_4 \to \infty$ kann willkürlich erfolgen. Da $m^4 V_4 \gg 1$ ist, muß zuerst $V_4 \to \infty$ und dann $m \to 0$ erfolgen. In der statistischen Physik ist es eine wohlbekannte Tatsache, daß eine Symmetrie nur spontan gebrochen werden kann, wenn es einen kleinen Term gibt, der diese Symmetrie explizit bricht und das Volumen des Systems gegen unendlich geht. Ganz am Ende kann der symmetrie-brechende Term entfernt werden. In der QCD ist die chirale Symmetrie spontan gebrochen (SBCS) und die kleinen Strom-Massen stellen die explizite Brechung der chiralen Symmetrie dar. Daher muß zuerst $V_4 \to \infty$ und dann $m \to 0$ durchgeführt werden [65]. Es kann also folgende Limes-Reihenfolge gewählt werden:

$$\lim_{m\to 0}\{\lim_{q\to 0}[\lim_{V_4\to\infty}(\ldots)]\}. \tag{6.32}$$

Dies rechtfertigt die von Anfang an benutzte Formulierung für unendliches Volumen.

In der realen QCD gibt es keine masselosen Teilchen ($m_\pi \neq 0$). Daher besitzen eichinvariante Formfaktoren keine masselosen Pole, insbesondere gilt

$$q^2 G_2^{GI}(q^2) \stackrel{q\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{6.33}$$

Aus (6.23), (6.29) und (6.33) erhält man

$$\Delta\Sigma^{GI} = \frac{m}{M} J(0) + A(0) \tag{6.34}$$

Diese Relation gilt mit oder ohne Goldstone-Bosonen im axialen Singulett-Kanal. Experimentell weiß man, daß das leichteste Teilchen in diesem Kanal das η' mit einer Masse von 958 MeV ist, die viel zu groß für ein Goldstone-Boson ist [63]. Folglich bleibt $J(0)$ im chiralen Limes endlich und wir erhalten

$$\Delta\Sigma^{GI} = A(0) \quad \text{for} \quad m \to 0 \tag{6.35}$$

Nimmt man die nicht-Existenz des axialen Singulett-Bosons von vornherein an, so ist die Reihenfolge der Limites in der Herleitung von (6.35) bedeutungslos. Beachten Sie, daß (6.35) nur wahr ist, falls $m = m_u = m_d = m_s$ gewählt wird, obwohl alle drei Massen gegen Null gehen. Andernfalls würden zusätzlich nicht-Singulett Ströme auf der rechten Seite von (6.34) den chiralen Limes überleben [55].

Verknüpfung von (6.23), (6.31) und (6.33) ergibt

$$2M\Delta\Sigma^c = q^2 G_2^c(q^2)_{|q^2=0} = -q^2 K_2(q^2)_{|q^2=0}$$

$\Delta\Sigma^c$ ist durch das Pol-Residuum von G_2^c gegeben. Da G_2^{GI} keinen masselosen Pol besitzt, ist $\Delta\Sigma^c$ ebenfalls durch den Pol von $-K_2$ gegeben. Diese masselosen Pole werden Geist-Pole genannt und können in der Tat auftreten, auch wenn es keine masselosen physikalischen Teilchen gibt, da G_2^c und K_2 eichabhängige Objekte sind. Man beachte, daß alle anderen in (6.23) definierten Formfaktoren eichinvariant und damit frei von masselosen Polen sind.

Tabelle 6.1 gibt eine Übersicht über die Werte der Formfaktoren bei Impulsübertrag Null für folgende Modelle:

- Das naive Quark-Modell nicht-wechselwirkenden Konstituenten-Quarks der Masse $m = M/3$,
- chirale QCD und Identifikation von $\Delta\Sigma^c$ mit dem naiven Spin-Wert 1,
- das Instanton-Flüssigkeits-Modell

Für das Instanton-Flüssigkeits-Modell werden die in Tabelle 6.1 angegebenen Formfaktoren in den folgenden Abschnitten berechnet.

	$\Delta\Sigma^c=\frac{q^2}{2M}G_2^c+\frac{m}{M}J$	$K_1=\frac{q^2}{2M}K_2+\ A$	$\Delta\Sigma^{GI}$-$\frac{q^2}{2M}G_2^{GI}=\Delta\Sigma^c+K_1=\frac{m}{M}J+\ A$
$3m=M$	1 = 0 + 1	0 = 0 + 0	1 - 0 = 1 + 0 = 1 + 0
$m=0$	1 = 1 + 0	A-1= -1 + A	A - 0 = 1 +A-1= 0 + A
Instanton	? = ? + 0	0 = 1 +(-1)	1 - 0 = ? + 0 = 0 +(-1)

Tabelle 6.1: *Proton Formfaktoren bei Impulsübertrag $q^2=0$ im naiven Konstituenten-Quark-Modell ($3m=M$), in der chiralen QCD (m=0) und im Instanton-Flüssigkeits-Modell (Instanton). Experimentell ist $A=0.27\pm0.13$.*

6.5 Reduktion der Proton Formfaktoren zu Vakuum-Korrelatoren

In den folgenden Abschnitten werden einige der oben definierten Formfaktoren im Instanton-Flüssigkeits-Modell berechnet. Um die Resultate aus Kapitel 4 verwenden zu können, werden die Formfaktoren auf Vakuum-Korrelatoren zurückgeführt.

$$\langle p's'|B(0)|ps\rangle = \tag{6.36}$$

$$= -\frac{1}{Z_\eta}\bar{u}_{s'}(p')\left[\int d^4x\, d^4z\ e^{ip'x-ipz}(i\not\partial_x - M)(-i\not\partial_z - M)\langle 0|\mathcal{T}\eta(x)B(0)\bar{\eta}(z)|0\rangle\right]u_s(p) \quad .$$

M ist die Proton-Masse und $B(0)$ ist ein beliebiger lokaler Operator. $\eta(x)$ ist ein lokaler Operator mit den Quanten-Zahlen des Protons, also z.B. ein Produkt von drei Quark-Feldern in geeigneter Spin- und Flavor-Kombination [44]. Nimmt man an, daß $\eta(x)$ für unendliche Zeiten gegen einen freien Proton-Feld-Operator geht, so kann der Proton-Zustand ausreduziert werden und (6.36) ist gerade eine LSZ-Reduktions-Formel für zusammengesetzte Felder. Für unsere Zwecke ist die folgende Form nützlicher:

$$\begin{aligned}
\langle p's'|B(0)|ps\rangle &= Z_\eta\bar{u}_{s'}(p')[\lim_{p^2,p'^2\to M^2} S^{-1}(p')T_B(p',p)S^{-1}(p)]u_s(p) \\
T_B(p',p) &= \int d^4x\, d^4z\ e^{ip'x-ipz}\langle 0|\mathcal{T}\eta(x)B(0)\bar{\eta}(z)|0\rangle \qquad (6.37)\\
S(p) &= \int d^4x\ e^{ipx}\langle 0|\mathcal{T}\eta(x)\bar{\eta}(0)|0\rangle = \frac{iZ_\eta}{\not p - M} + continuum \\
Z_\eta^{1/2}u_s(p) &= \langle 0|\eta(0)|ps\rangle
\end{aligned}$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, daß die Masse M nicht explizit benötigt wird. In Euklidischen Berechnungen, wie Gitter-, Instanton- und OPE-Berechnungen ist es stets schwierig, Polmassen zu bestimmen.

Diese Form der Darstellung kann auch als Spektral-Darstellung einer 3-Punkt-Funktion angesehen werden. Schiebt man zwei vollständige Systeme von Zuständen in die 3-Punkt-Funktion ein, und führt man den Limes $p^2=p'^2\to M^2$ durch, um den Proton-Zustand zu selektieren, so erhält man (6.37) direkt.

Falls $B(0)$ ein Quark-Strom ist, so enthält die 3-Punkt-Funktion ein Produkt von 8 Quark-Feldern. Dieser Ausdruck ist zu kompliziert, um im Multi-Instanton-Vakuum berechnet

werden zu können. Im folgenden werden wir annehmen, daß das Proton aus nahezu unabhängigen Quarks besteht. In diesem Bild ist die wesentliche nicht-perturbative Eigenschaft des Protons die Formierung von Konstituenten-Quarks aus Strom-Quarks. Die Kräfte, die die Konstituenten im Proton einschließen, modifizieren die Eigenschaften des Protons nur wenig, außer daß das Proton dadurch stabil wird. Diese Annahme wird durch den Erfolg des Konstituenten-Modells gestützt. Die Formfaktoren des Protons sind damit die Summe der Formfaktoren der Konstituenten-Quarks. η muß durch ein einzelnes Quark-Feld ψ mit Flavor *up* oder *down* ersetzt werden und M durch die Konstituenten-Quark-Masse. In diesem Fall ist es noch wichtiger (6.37) zu verwenden, da eine definite Polmasse für den Quark-Propagator nicht zu erwarten ist. Betrachtet man den Quark-Propagator im Instanton-Flüssigkeits-Modell, so sieht man, daß der $\not{p}$ Term unrenormiert bleibt und damit $Z_\psi = 1$ ist. Für eine konstante Konstituenten-Masse wäre dieses Argument rigoros. Für eine laufende Masse ist es zumindest plausibel, daß Z_ψ weiterhin ungefähr eins ist. Diese Tatsache trifft auf alle Modelle chiraler Symmetrie-Brechung zu, die ich kenne. Eine konservative Abschätzung ist

$$0.7 \leq Z_\psi \leq 1 \tag{6.38}$$

Im folgenden werde ich $Z_\psi = 1$ setzen. Die Ergebnisse aller Formfaktoren muß man sich mit Z_ψ multipliziert denken.

6.6 Axiale Formfaktoren $G^{GI}_{1/2}(q)$

Der Formfaktor des Stromes $j_\Gamma = \bar{\psi}\Gamma\psi$ eines Konstituenten-Quarks kann mit Hilfe von (6.37) auf eine 4-Punkt-Funktion (4.2) reduziert werden:

$$tr_{CD}[T_{j_\Gamma}(p',p)\Gamma'] = \int d^4x\, d^4z\; e^{ip'x - ipz} tr_{CD}[\langle 0|\mathcal{T}\psi(x)\bar{\psi}(0)\Gamma\psi(0)\bar{\psi}(z)|0\rangle\Gamma'] = \tag{6.39}$$

$$= \int \bar{d}^4q\, \Pi_{\Gamma\Gamma'}(q-p, q-p', p, p')$$

Die Polarisierungs-Funktionen $\Pi_{\Gamma\Gamma'}$ wurden in Kapitel 4 definiert und im Instanton-Flüssigkeits-Modell berechnet. Für $\Gamma = \gamma_\mu\gamma_5$ ist der verbundene Teil der 4-Punkt-Funktion mit $O(n_R^{1/2})$ unterdrückt. In führender Ordnung in der Instanton-Dichte trägt nur der unverbundene Teil (4.17) bei und wir erhalten

$$T_{j^{GI}_{\mu 5}}(p',p) = S(p')\gamma_\mu\gamma_5 S(p) \tag{6.40}$$

Einsetzen von (6.40) in (6.37) und Vergleich mit (6.22) ergibt

$$\langle p's'|J^{GI}_{\mu 5}(0)|ps\rangle = \bar{u}_{s'}(p')\gamma_\mu\gamma_5 u_s(p) \tag{6.41}$$

$$G_1^{GI}(q^2) = 1 \quad , \quad G_2^{GI}(q^2) = 0$$

Man beachte, daß $\Pi_{\Gamma\Gamma'}$ in singulärer Eichung berechnet wurde, aber der verbundene Teil ist in jeder Eichung unterdrückt und der unverbundene Teil hängt nur vom Propagator

ab, der sich so oder so kürzt. Die Formfaktoren $G_{1/2}^{GI}(q)$ sind also in der Tat eichinvariant. Das Ergebnis stimmt mit einem Modell freier massiver Quarks überein. Weiterhin sieht man, daß der Strom $j_{\mu 5}^{GI}$ nicht erhalten ist. Stromerhaltung würde $q^2 G_2 = M G_1$ verlangen, was offensichtlich von (6.41) nicht erfüllt wird. In der 1-Instanton-Approximation kann man von Anfang an mit der effektiven 't Hooft-Wechselwirkung [17] arbeiten, die die $U(1)$-Symmetrie explizit bricht und damit die Anomalie bereits enthält.

Das Resultat für den eichinvarianten Formfaktor (6.41), obwohl nicht konsistent mit den experimentellen Werten ist *bis hierher* zumindest theoretisch konsistent.

6.7 Der Anomalie-Formfaktor $A(q)$ *

Widmen wir uns nun dem Anomalie-Formfaktor A. Durch erneutes Anwenden der Reduktions-Formel (6.37) mit $B(0) = a(0)$ besteht die Aufgabe in der Berechnung der 3-Punkt-Funktion $T_a(p,s)$. Im Instanton-Modell ist der Feldoperator $a(0)$ durch das klassische Feld $a_A(0)$ ersetzt, wobei $A = \sum_I A_I$ eine in a eingesetzte Multi-Instanton-Konfiguration ist. In gegebenem Hintergrund A kann der Korrelator in der Form

$$\langle 0|\mathcal{T}\psi(x)a(0)\bar{\psi}(z)|0\rangle_A = a_A(0)\langle 0|\mathcal{T}\psi(x)\bar{\psi}(z)|0\rangle_A = a_A(0)S_A(x,z) \qquad (6.42)$$

geschrieben werden, wobei $S_A(x,z)$ der Quark-Propagator im Multi-Instanton-Hintergrund A ist. Die rechte Seite muß nun über die kollektiven Koordinaten γ_I aller Instantonen gemittelt werden. Ohne den Faktor $a_A(0)$ ergäbe dies gerade den gemittelten Propagator. Zum Verständnis der folgenden Diskussion ist es nützlich, die Berechnung des Propagators in Kapitel 3 zu rekapitulieren. $a_A(y)$ ist das $2N_f$-fache der topologischen Ladungsdichte am Raumzeitpunkt y. In der Umgebung eines Instantons der Ladung $Q_I = \pm 1$ hat die Dichte einen positiven/negativen Hügel und ist klein überall sonst. Folglich ist $a_A(y)$ nur von Null verschieden, wenn sich mindestens ein Instanton in der Nähe von y befindet. Sei nun genau ein Instanton in der Nähe von $y = 0$ fixiert. Die Orientierung und die Ladung der restlichen Instantonen kann unabhängig gemittelt werden, aber bei der Mittelung über die Orte z_J muß das Gebiet in der Umgebung von y vermieden werden. Der nächste Schritt ist, 2 Instantonen nahe y anzunehmen, u.s.w. Der relative Fehler, den man durch Vernachlässigen dieser weiteren Beiträge und durch Ignorieren der Restriktion von z_J macht, sind beide von $O(n_R)$. In führender Ordnung in der Instanton-Dichte können wir somit ein Intanton nahe $y = 0$ fixieren und nur diesen Beitrag zu $a_A(0)$ berücksichtigen. Die anderen Instantonen können wie im Falle des Propagators gemittelt werden. Die aufzusummierenden Diagramme sind dabei die gleichen, nur daß ein Instanton I fixiert wird. Der Propagator besteht aus einer Folge von Streuungen an A_J $(J = 1 \ldots N)$, wobei mehrfache Streuungen am gleichen Instanton erlaubt sind. Es gibt 2 Fälle: Im ersten Fall sind alle Instantonen, die links aller A_I auftreten, verschieden von allen Instantonen, die rechts aller A_I auftreten. In führender Ordnung in $1/N_c$ sind alle Instantonen im Mittelabschnitt vom ersten bis zum letzten Auftreten von A_I verschieden von den äußeren Instantonen. Die Instantonen auf der rechten und auf der linken Seite können unabhängig voneinander gemittelt werden, was zu gemittelten Multi-Instanton Propagatoren führt. Mittelung des Mittelabschnitts, aber Fixierung

von I, ergibt den effektiven Vertex M_I. Der freie Teil des Korrelators im Impulsraum ist folglich

$$T_a^{free}(p,s) = \langle 2N_f Q_I(z_I)$$

$$\rangle_I =$$

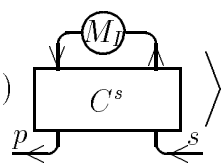
$$= -2iN_f \hat{Q}(p-s)\sqrt{M_p M_s}\, S(p)\gamma_5 S(s) \tag{6.43}$$

$$Q_I(z_I) = \frac{1}{2N_f} a_{A_I}(0) = \pm\frac{6}{\pi^2}\left(\frac{\rho}{z_I^2+\rho^2}\right)^4$$

$Q_I(z_I)$ ist die Ladungsdichte eines Instantons der Ladung $Q_I = \pm 1$ und $\hat{Q}(q) = \frac{1}{2}(q\rho)^2 K_2(q\rho)$ ist die Fourier-Transformation[3] für $Q_I = +1$. Für $p^2 = s^2 = M^2$ ist der Term $\sqrt{M_p M_s}$ gerade die Onshell-Masse M. Einsetzen von (6.43) in (6.37) und Vergleich mit (6.22) ergibt für den freien Teil des Anomalie-Formfaktors:

$$A^{free}(q) = -N_f \hat{Q}(q) \quad , \quad A^{free}(0) = -N_f \tag{6.44}$$

Im 2. Fall gibt es gemeinsame Instantonen zur linken und zur rechten Seite von I. Der verbundene Teil des Korrelators und des Formfaktors sind

$$T_a^{conn}(p,s) = \Big\langle 2N_f Q_I(z_I)$$ 

$$\Big\rangle_I = \tag{6.45}$$

$$= -4N_f i\hat{Q}(p-s)C_5^s(p-s)F_5(p-s)\sqrt{M_p M_s}\, S(p)\gamma_5 S(s)$$

$$A^{conn}(q) = -2N_f \hat{Q}(q) C_5^s(q) F_5(q) \quad , \quad A^{conn}(0) = N_f - 1 \tag{6.46}$$

Dieses Ergebnis kann leicht mit Hilfe der Formeln aus Kapitel 4 hergeleitet werden. Im letzten Schritt wurde $F_5(0) = 1$ und $C_5^s(0) = 1/N_f - 1$ verwendet. Für ein Flavor ist der verbundene Teil Null, wie er es sein sollte. Der Anomalie-Formfaktor bei Impulsübertrag Null

$$A(0) = A^{free}(0) + A^{conn}(0) = -1 \tag{6.47}$$

ist somit unabhängig von der Zahl der Flavors! Dieses Resultat ist willkommen, aufgrund folgender Argumentation: Die Formfaktoren der axialen Singulett-Ströme $j_{\mu 5}$ sollten nicht von einem Quark-Flavor abhängen, der nicht im betrachteten Teilchen-Zustand vorkommt. Deshalb erwartet man, daß sie unabhängig von N_f sind. Wegen (6.21) müssen dann auch Matrix-Elemente von $a(x)$ unabhängig von N_f sein. Aber dies ist nicht offensichtlich, da $a(x)$ explizit proportional zu N_f ist und das Gluon-Feld nicht Flavor-sensitiv ist. Obige Rechnung zeigt, wie die Quark-Wechselwirkung den freien Teil, der proportional zu N_f ist, auslöscht, so daß der Formfaktor insgesamt unabghängig von N_f ist, zumindest für Impulsübertrag Null.

[3] Für die Überladung des Symbols K möchte ich mich entschuldigen: $K_2(q\rho)$ ist eine modifizierte Bessel-Funktion, $K_\mu(x)$ ist der Anomalie-Strom und $K_{1/2}(q)$ dessen Formfaktoren.

6.8 Die Anomalie-Formfaktoren $K_{1/2}(q)$

Für $K_{1/2}(0)$ kann die Berechnung des letzten Abschnittes mit nur kleineren Änderungen übernommen werden. $a(0)$ muß zunächst durch $K_\mu(0)$ ersetzt werden. Dies impliziert die Ersetzungen

$$2Q(z_I) \rightsquigarrow G_\mu(z_I) := \frac{1}{N_f} K^\mu_{A_I}(0) \quad , \quad 2\hat{Q}(q) \rightsquigarrow \hat{G}_\mu(q) \tag{6.48}$$

$G_\mu(z_I)$ ist $K_\mu(0)$, wobei das Eichfeld ein bei z_I plaziertes Instanton der Ladung $Q_I = +1$ und $\hat{G}_\mu(q)$ seine Fourier-Transformation ist. In regulärer Eichung erhalten wir

$$\begin{aligned} G^{reg}_\mu(z) &= \frac{1}{N_f} K^\mu_{A^{reg}_I}(0) = -\frac{z_\mu(z^2+3\rho^2)}{\pi^2(z^2+\rho^2)^3} \\ \hat{G}^{reg}_\mu(q) &= -iq_\mu\rho^2 K_2(q\rho) \stackrel{q\to 0}{\longrightarrow} -2iq_\mu/q^2 \end{aligned} \tag{6.49}$$

Mit Hilfe dieser Ersetzungen in (6.43) und (6.45) ermöglicht ein Vergleich mit (6.22) die Bestimmung von $K_{1/2}(q)$:

$$K^{reg}_1(q) = 0 \quad , \quad \lim_{q^2\to 0} \frac{q^2}{2M} K^{reg}_2(q) = 1 \tag{6.50}$$

In singulärer Eichung erhalten wir dagegen

$$G^{sing}_\mu(z) = G^{reg}_\mu(z) + \frac{z_\mu}{\pi^2 z^4} \quad , \quad \hat{G}^{sing}_\mu(q) = \hat{G}^{reg}_\mu(q) + 2iq_\mu/q^2 \stackrel{q\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{6.51}$$

$$K^{sing}_1(q) = 0 \quad , \quad \lim_{q^2\to 0} \frac{q^2}{2M} K^{sing}_2(q) = 0$$

Offensichtlich ist der Anomalie-Formfaktor $K_2(q)$ eichabhängig und enthält einen masselosen Pol in der regulären Eichung. Der Grund hierfür ist die Eichabhängigkeit des Anomalie-Stromes K_μ selbst. Man kann zeigen, daß die Vorwärts-Matrix-Elemente $K_{1/2}(0)$ für kleine Eichtransformationen eichinvariant sind. Eine Eichtransformation wird 'klein' genannt, wenn sie stetig in die Identität deformiert werden kann. Auf der anderen Seite ist die Eichtransformation, die ein Instanton von regulärer Eichung in singuläre Eichung transformiert 'groß', da die singuläre Lösung aufgrund der Singularität nicht stetig in die reguläre Lösung deformiert werden kann.

Eine weitere bemerkenswerte Beobachtung ist, daß die Relation

$$K_1(q) - \frac{q^2}{2M} K_2(q) = A(q) \tag{6.52}$$

in singulärer Eichung verletzt ist, wie aus (6.51) ersichtlich ist:

$$K^{sing}_1(q) - \frac{q^2}{2M} K^{sing}_2 \neq A(q) \tag{6.53}$$

Oberflächen-Terme sind der Grund für diese Verletzung. Für die Herleitung von (6.52) wurde das Verschwinden von Oberflächen-Termen angenommen. Ersetzt man die ebene Wellenlösung für den Proton/Quark-Zustand durch ein Wellenpaket, dann fallen der Zustand und damit alle Matrix-Elemente genügend schnell im räumlich Unendlichen ab und es gibt keine Oberflächen-Terme. Ein experimenteller Zustand ist stets ein mehr oder weniger lokalisiertes Wellenpaket. Folglich gibt es in regulärer Eichung keine Oberflächen-Terme und

$$K_1^{reg}(q) - \frac{q^2}{2M} K_2^{reg} = A(q) \tag{6.54}$$

ist gültig für alle q. Um in singulärer Eichung arbeiten zu können, muß als Raumzeit-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^4 \backslash \{0\}$ gewählt werden, um die unphysikalische Singularität auszuschließen. Dieses kleine Loch sollte die Physik bei großen Abständen nicht beeinflussen. Alle Ortsraum-Integrale sind folglich Integrale über $\mathbb{R}^4 \backslash B_\varepsilon(0)$. Eine partielle Integration kann nun auch zu Oberflächen-Termen bei Null führen. Der Oberflächen-Term ist für G_μ^{sing} von Null verschieden, wie in (6.51) zu sehen ist. Dies ist die Ursache der Ungleichung (6.53). Es ist ein wenig überraschend, daß nicht das langsam abfallende reguläre Eichfeld einen Oberflächen-Term bei unendlich verursacht, sondern die starke Singularität an den Instanton-Zentren einen Oberflächen-Term und damit die Verletzung (6.52) bewirkt.

Folgende Standpunkte können eingenommen werden:

1. Eichabhängige Objekte, wie $K_{1/2}(q)$, sollten nicht betrachtet werden, da sie unphysikalisch sind, oder

2. die Relation (6.52) wird durch Verwendung der regulären Eichung erhalten (dies widerspricht allerdings der Philosophie des Kapitels 8) oder

3. die Relation (6.52) wird durch Hinzunahme von Oberflächen-Termen modifiziert, die bei partieller Integration entstehen.

In folgender Diskussion werde ich Standpunkt 2 einnehmen.

6.9 Diskussion

Vergleicht man die Resultate für die Formfaktoren $\Delta\Sigma^{GI} = G_1^{GI}(0)$, $G_2^{GI}(0)$, $A(0)$, $K_1(0) = K_1^{reg}(0)$ und $K_2(0) = K_2^{reg}(0)$, die in der letzten Zeile der Tabelle 6.1 zusammengefaßt sind, so sieht man deutlich, daß sie widersprüchlich sind. Es ist nicht möglich, die restlichen Formfaktoren so zu bestimmen, daß sie konsistent mit (6.23) und (6.33) sind Der offensichtlichste Widerspruch ist $\Delta\Sigma^{GI} \neq A(0)$. Ein entgegengesetztes Vorzeichen der Anomalie wäre wenigstens theoretisch konsistent und würde der naiven Erwartung entsprechen. Der einzige Kandidat für die Verletzung der axialen Ward-Identität ist die Vernachlässigung der nicht-Nullmoden. Alle anderen Approximationen respektieren die Symmetrien der QCD, wie in Abschnitt 3.3 diskutiert wurde.

Forte [53] leitete die Relation $\Delta\Sigma + A(0) = 0$ in einem Instanton-Modell im Falle eines Quark-Flavors unter Vernachlässigung dynamischer Quark-Schleifen und in einer Dichte-Entwicklung her. $\Delta\Sigma$ wurde dort mit $\Delta\Sigma^c$ identifiziert und $K_2(0) = 0$ wurde implizit angenommen. Folglich ist $A(0) = K_1(0)$ und mit (6.31) kann man das willkommene Resultat $\Delta\Sigma^{GI} = 0$ zeigen.

In Abschnitt 6.8 habe ich gezeigt, daß die Anomalie zu K_2 und nicht K_1 beiträgt. Dies ist die erste Diskrepanz zu [53]. Weiterhin habe ich in Abschnitt 6.6 gezeigt, daß $\Delta\Sigma$ mit $\Delta\Sigma^{GI}$ zu identifizieren ist. Dies ist die zweite Diskrepanz. Es mag sich herausstellen, daß die Berücksichtigung der nicht-Nullmoden diese Diskrepanz in einer Weise behebt, die zu einem phänomenologisch akzeptablen kleinen $\Delta\Sigma^{GI}$ führt; doch dies bleibt zu zeigen. In der 1-Instanton-Approximation ist diese Berücksichtigung bewältigbar und wurde in [22] für die Meson-Korrelatoren durchgeführt. Die konsistente Erweiterung auf das Instanton-Flüssigkeits-Modell und die Quark-Formfaktoren war mir bisher nicht möglich.

Diese Probleme sollten mit der Berechnung der η' Masse verglichen werden. Die Standard-Methode, die Meson-Korrelatoren zu berechnen und die Meson-Massen aus einem spektralen Fit zu gewinnen, war im Falle des η' auch nicht sehr erfolgreich. Verfeinerte Argumente erlaubten in Abschnitt 6.6 eine erfolgreiche Bestimmung von $m_{\eta'}$. Das Instanton-Modell ging eher in unspezifischer Weise ein. Es ging in die (Anti)selbstdualitäts-Bedingung (6.21) und in der Abschätzung für die Unterdrückung des Gluon-Kondensats durch leichte Quarks ein. Vielleicht ist eine ähnliche, mehr indirekte Zuhilfenahme von Instantonen, in der Lage auch das Proton-Spin-Problem zu lösen.

Genauso gut ist es möglich, daß das Proton-Spin-Problem nicht auf der Ebene von individuellen Konstituenten-Quarks gelöst werden kann, sondern mit einer starken Wechselwirkung zwischen verschiedenen Konstituenten-Quarks im axialen Singulett-Kanal zu tun hat. Diese Möglichkeit in Zusammenhang mit Instantonen ist in [69] diskutiert.

Kapitel 7

Gluon-Masse

Bisher wurde das Instanton-Vakuum auf dem klassischen Niveau behandelt. In diesem Kapitel sollen die Quanten-Fluktuationen um das Instanton-Vakuum zum Gluon-Propagator berechnet werden.

Abschnitt 7.1 ist eine kurze Einführung in die Probleme und die phänomenologischen Konsequenzen massiver Eichtheorien. In den anderen Abschnitten wird der Gluon-Propagator in verschiedenen Eichungen berechnet. In der Hintergrund $\xi = 1$-Eichung hat der Gluon-Propagator die einfache Gestalt $S^{ab}_{\mu\nu} = \delta^{ab} g_{\mu\nu}/(p^2 - M(p)^2)$. In Abschnitt 7.2 wird der inverse Propagator aus den Termen extrahiert, die quadratisch in den Fluktuationen um den Hintergrund sind. In Abschnitt 7.3 wird dieser Ausdruck über relevante Hintergrund-Felder gemittelt und die Gluon-Masse $M(p)$ extrahiert. In Abschnitt 7.4 wird M explizit im Multi-Instanton-Vakuum berechnet. Für große Impulse wird diese Masse allerdings von Termen, die vernachlässigt wurden, ausgelöscht. Weiterhin ist die Masse stark eichabhängig. Um zuverlässige Resultate im gesamten Impulsbereich zu erhalten, wird in Abschnitt 7.5 eine Cluster-Entwicklung in der Instanton-Dichte vorgestellt. Zu diesem Zweck benötigen wir den Gluon-Propagator im ein-Instanton-Vakuum. Benötigte Formeln zur Konstruktion dieses Propagators sind in Abschnitt 7.6 zusammengestellt. Da diese Ausdrücke sehr lang sind, werden wir uns in Abschnitt 7.7 auf den Fall kleiner Impulse beschränken.

7.1 Einführung

Die Frage, ob die Erzeugung einer Masse für Eichbosonen ohne Brechung der Eichsymmetrie möglich ist, ist sehr alt. Die explizite Einführung einer Gluon-Masse in der Lagrange-Diche verursacht einige Schwierigkeiten. Um die Eichinvarianz zu erhalten, müssen die Eichfelder an masselose skalare Teilchen gekoppelt werden [30, 31], die von physikalischen Matrix-Elementen entkoppeln. Die Masse kann keine konstante sein, sondern muß für große Impulse verschwinden, um die Renormierbarkeit der Theorie zu gewährleisten (weiche Masse). Beide Phänomene (masselose Skalare und eine weiche Gluon-Masse) treten auch in jedem Modell einer dynamischen Erzeugung einer Gluon-Masse auf. Es sollte

erwähnt werden, daß die Terminologie einer Masse nicht notwendigerweise eine Polmasse bedeutet, sondern die Selbstenergie. Von einer dynamischen Masse wird gesprochen, falls die Selbstenergie bei $p^2 = 0$ von Null verschieden ist und somit der masselose Pol im Propagator verschwunden ist. In [38] wurde eine eichinvariante Gluon-Selbstenergie definiert und berechnet. Lösen der Schwinger-Dyson-Gleichungen liefert eine Masse von $500 \pm 200 MeV$. Aufgrund der asymptotischen Freiheit verschwindet die Masse bei großen Impulsen logarithmisch $M_{gluon}(p) \sim (\ln p^2)^{-12/11}$. Nicht-Perturbative Argumente ergeben ein Abfallverhalten, wie $\frac{1}{p^2}(\ln p^2)^{12/11}$ [32, 33]. Als letztes sei noch erwähnt, daß eine dynamische Gluon-Masse nicht im Widerspruch zu Confinement steht [34, 35, 36, 37].

Neben der Regularisierung aller Infrarot-Divergenzen, hat eine Gluon-Masse ein Reihe phänomenologischer Konsequenzen. Eine direkte Konsequenz sind Gluon-Ball-Massen. Im einfachsten Bild, in dem Gluon-Bälle aus N Konstituenten-Gluonen bestehen, ist die Masse von der Ordnung $N \cdot M_{gluon}$. Hadronen mit Gluonen können auch konstruiert werden ($\bar{q}qg$, $qqqg$, ...). Natürlich sind die Gluonen aufgrund der starken Wechselwirkung hochgradig virtuell, und es ist nicht einmal klar ob dieses Bild qualitativ korrekt ist. Man kann nur auf den Quark-Sektor und den Erfolg des Konstituenten-Quark-Modells verweisen. Weiterhin modifiziert eine Gluon-Masse die transversale Impulsverteilung von Gluon-Jets und mit einer theoretisch vorhergesagten Gluon-Masse besitzt man einen natürlichen Energie-Cutoff. Für die Instanton-Physik ist eine Gluon-Masse ebenfalls willkommen: In einer massiven Eichtheorie sind Instantonen der Größe $\rho \geq M_{gluon}^{-1}$ exponentiell unterdrückt. Es gibt somit kein Infrarot-Problem mehr. Geht man vom Instanton-Flüssigkeits-Modell unabhängiger Instantonen mit Radius $\rho = 600 MeV^{-1}$ und einer Dichte von $n = (200 MeV)^4$ aus, so erhält man eine Gluon-Masse von $M_{gluon} = 480$ MeV, die nahe der Cutoff-Skala $\rho^{-1} = 600 MeV$ liegt. Man beachte, daß diese Möglichkeit das Infrarot-Problem zu lösen verschieden ist, von der Standard-Hoffnung eine abstoßende Wechselwirkung zwischen großen Instantonen zu finden [24, 25, 20].

Für eine quantitative Theorie muß die Berechnung des unphysikalischen Gluon-Propagators auf eichinvariante Matrix-Elemente, wie Gluon-Ball-Korrelatoren, erweitert werden. Dies ist ein Problem in allen bisherigen Arbeiten (inklusive dieser). Die Methoden eine Gluon-Masse zu erhalten sind zu kompliziert, um auf physikalische Größen angewendet werden zu können. Daher ist es schwierig, die oben erwähnten physikalischen Anwendungen quantitativ zu machen.

In den folgenden Abschnitten wird der gemittelte Quanten-Gluon-Propagator für verschiedene Eichungen im Multi-Instanton-Hintergrund berechnet. Obwohl explizite Ausdrücke seit langer Zeit bekannt sind [18], wurden sie in phänomenologischen Anwendungen bisher nicht verwendet, da sie sehr kompliziert sind. Bisher wurde der Instanton-Hintergrund klassisch bahandelt. Selbst die 1-Schleifen Instanton-Wirkung [17] ist aufgrund des Infrarot-Problems von geringer praktischer Bedeutung. Auf der anderen Seite können Quanten-Korrekturen zu gluonischen n-Punkt-Funktionen groß sein.

7.2 Der Gluon-Propagator *

Die erste Aufgabe, um einen formalen Ausdruck für den Gluon-Propagator in einem Hintergrundfeld zu gewinnen, besteht darin, $\mathcal{L}_{QCD}[\bar{A}+B]$ in den Fluktuationen B^a_μ um das Hintergrund-Feld $\bar{A}^a_\mu$ zu entwickeln. Der in B^a_μ quadratische Term ist dann nach Definition der inverse Gluon-Propagator. Für $\bar{A}^a_\mu$ wird später die Instanton-Flüssigkeit eingesetzt. Wir gehen von der Euklidischen QCD-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{4g^2} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu}_a \quad , \quad G^a_{\mu\nu}(A) = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

aus. Einsetzen von $A = \bar{A} + B$ ergibt

$$g^2 \mathcal{L}_{QCD}(\bar{A}+B) = \frac{1}{4} G^a_{\mu\nu}(\bar{A}+B) G^{\mu\nu}_a(\bar{A}+B) =$$

$$= \frac{1}{4} \overbrace{\bar{G}^a_{\mu\nu}\bar{G}^{\mu\nu}_a}^{O(B^0)} + \overbrace{B^a_\mu \bar{D}^{ab}_\nu \bar{G}^{\mu\nu}_b}^{O(B^1)} + \frac{1}{2} \overbrace{B^a_\mu(-\bar{D}^{ac}_\rho \bar{D}^{cb}_\rho \delta_{\mu\nu} - 2 f_{acb}\bar{G}^c_{\mu\nu} + \bar{D}^{ac}_\mu \bar{D}^{cb}_\nu) B^b_\nu}^{O(B^2)} +$$

$$+ \underbrace{f_{abc} B^b_\mu B^c_\nu \bar{D}^{ad}_\mu B^d_\nu}_{O(B^3)} + \frac{1}{4} \underbrace{f_{abc} B^b_\mu B^c_\nu f_{ade} B^d_\mu B^e_\nu}_{O(B^4)} + \partial_\mu(\ldots) \quad , \tag{7.1}$$

wobei $\bar{D}^{ab}_\mu = \partial_\mu \delta_{ab} + f_{acb}\bar{A}^c_\mu$ die kovariante Ableitung mit $\bar{A}$ anstelle von A ist. Analog ist $\bar{G}^a_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu}(\bar{A})$. Die Oberflächenterme $\partial_\mu(\ldots)$ beeinflussen den Propagator nicht. Löst $\bar{A}$ die QCD-Bewegungsgleichungen, so verschwindet der in B lineare Term. In Hintergrund-Eichung $\bar{D}^{cb}_\nu B^b_\nu = 0$ ist der letzte Term des $O(B^2)$-Beitrags Null. Aus dem in B quadratischen Term kann nun der inverse Gluon-Propagator abgelesen werden. Im folgenden werden die Striche über A, G und D unterdrückt, da die ungestrichenen Größen nicht länger benötigt werden:

$$(S^{-1})^{ab}_{\mu\nu} = -D^{ac}_\rho D^{cb}_\rho \delta_{\mu\nu} - 2 f_{acb} G^c_{\mu\nu} \quad . \tag{7.2}$$

Zur Vereinfachung der Notation führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$G_{\mu\nu} = F^c G^c_{\mu\nu} \quad , \quad A_\mu = F^c A^c_\mu \quad ,$$

$$(F^c)_{ab} = i f_{acb} \quad , \quad [F^a, F^b] = i f_{abc} F^c \quad , \quad tr_c F^a F^b = N_c \delta^{ab} \quad , \quad N_c = 3 \quad ,$$

$$(\hat{P}_\mu)^{ab} = i D^{ab}_\mu \quad , \quad \hat{p}_\mu = i\partial_\mu \quad , \quad \hat{P}_\mu = \hat{p}_\mu + A_\mu \quad ,$$

$$\hat{p}_\mu X = [\hat{p}_\mu, X] + X\hat{p}_\mu = i(\partial_\mu X) + X\hat{p}_\mu \quad . \tag{7.3}$$

Die letzte Gleichung wurde nur aufgenommen, um zu betonen, daß $\hat{p}$ und $\hat{P}$ im Operator-Sinne verwendet werden. F^a sind die Generatoren in adjungierter Darstellung und f_{abc} die Strukturkonstanten der Farb-Eichgruppe $SU(N_c)$. Der Propagator schreibt sich nun:

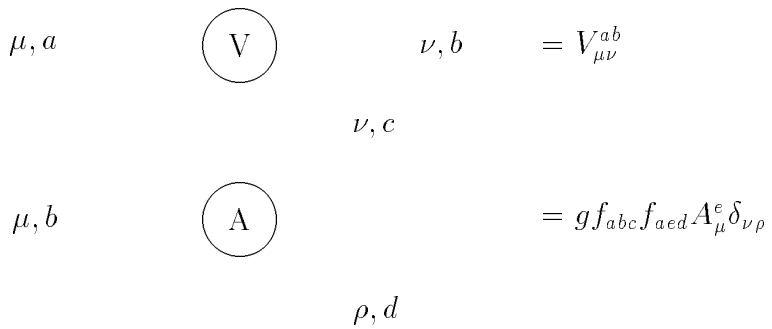
$$S^{-1}_{\mu\nu} = \hat{P}^2 \delta_{\mu\nu} + 2iG_{\mu\nu} = (\hat{p}^2 + \hat{p}\cdot A + A\cdot\hat{p} + A^2)\delta_{\mu\nu} + 2iG_{\mu\nu} = (S_0^{-1} + V)_{\mu\nu} \quad ,$$

$$S^0_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}/\hat{p}^2 \quad , \quad V_{\mu\nu} = (A^2 + \hat{p}\cdot A + A\cdot\hat{p})\delta_{\mu\nu} + 2iG_{\mu\nu} \quad . \tag{7.4}$$

S_0 ist der freie Propagator ohne Hintergrund und V kann als Wechselwirkungs-Potential des Hintergrundes aufgefaßt werden. Die QCD-Lagrange-Dichte (7.1) kann in einer für die Störungstheorie geeigneteren Form geschrieben werden:

$$g^2\mathcal{L}_{QCD} = \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}(B)G^{\mu\nu}_a(B) + \frac{1}{2}B^a_\mu V^{ab}_{\mu\nu}B^b_\nu + f_{abc}f_{aed}B^b_\mu B^c_\nu B^d_\nu A^\mu_e \tag{7.5}$$

Terme, die unabhängig und linear in B sind, wurden weggelassen. Konstante Terme sind für die Dynamik irrelevant und in B lineare Terme sind Null, falls A die QCD-Bewegungsgleichungen löst. Die durch den Hintergrund hinzugekommenen Terme erzeugen zwei zusätzliche Feynman-Graphen



Es sollte betont werden, daß für kleine Kopplung g der zweite Graph störungstheoretisch behandelt werden kann, der erste hingegen nicht! Daher liegt unser Hauptaugenmerk auf dem ersten Graphen.

7.3 Der Propagator im statistischen Hintergrund *

Der nächste Schritt in der Berechnung des Propagators

$$S = (S_0^{-1} + V)^{-1} = S_0(\mathbb{1} + T)^{-1} \quad , \quad T = VS_0 \quad . \tag{7.6}$$

ist die Ausarbeitung eines Approximations-Schemas. Man kann S in Potenzen von T entwickeln:

$$S = S_0(\mathbb{1} - T + T^2 - T^3 + \ldots) \quad . \tag{7.7}$$

Beachte, daß $S(x,y) = \langle x|S|y\rangle$ im allgemeinen nicht translations- und rotationsinvariant ist, da A_μ und damit T es ebenfalls nicht sind. Letztendlich sind wir nicht am Propagator in einem konkreten Hintergrund interessiert, sondern nur am Mittel über alle relevanten Hintergrund-Felder. An dieser Stelle sind nicht die Quantenfluktuationen um das leere Vakuum gemeint, sondern klassische Felder, die sich vom $A_\mu = 0$-Vakuum unterscheiden und die Euklidische Wirkung $\int \mathcal{L}\,dx$ minimieren.

$$\overline{S} = S_0(\mathbb{1} - \overline{T} + \overline{T^2} - \overline{T^3} + \ldots) \quad , \tag{7.8}$$

die Überstreichung bedeutet Mittelung über relevante Konfigurationen. Für das Instanton-Flüssigkeitsmodell ist diese Mittelung in Anhang A.3 definiert. Ist der Hintergrund statistisch translationsinvariant, so ist auch $\overline{S}$ translationsinvariant und damit

$\overline{S}(p,q) = \langle p|\overline{S}|q\rangle = \overline{S}(p)\delta(p-q)$. diagonal im Impulsraum. Da wir $\overline{S}$ in der Form $\overline{S}(p) = (p^2 + M(p)^2)^{-1}$ benötigen, ist es sinnvoll (7.8) zu invertieren

$$\overline{S}^{-1} = \hat{p}^2 + M(\hat{p})^2 = (\mathbb{1} - \overline{T} + \overline{T^2} - \overline{T^3} + \ldots)^{-1} S_0^{-1} \tag{7.9}$$

und erneut in T zu entwickeln. Ohne Mittelung wäre dies eine geometrische Reihe und gerade unser ursprünglicher Ausdruck $S^{-1} = S_0^{-1} + V$. Durch die Mittelung stehen die einzelnen Terme nun in keinerlei Beziehung zueinander. Entwickeln und Sortieren nach Potenzen von T ergibt:

$$\begin{aligned} \overline{S}^{-1} &= (\mathbb{1} + \overline{T} - (\overline{T^2} - \overline{T}^2) + (\overline{T^3} - \overline{T}\,\overline{T^2} - \overline{T^2}\,\overline{T} + \overline{T}^3))S_0^{-1} + O(T^4) \\ &= S_0^{-1} + \overline{V} - (\overline{VS_0V} - \overline{V}S_0\overline{V}) + \ldots \\ &= S_0^{-1} + M^2, \quad M^2 = M_1^2 - M_2^2 + \ldots, \quad M_1^2 = \overline{V}, \quad M_2^2 = \overline{VS_0V} - \overline{V}S_0\overline{V}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Im nächsten Abschnitten wird M_1 im Instanton-Flüssigkeits-Modell berechnet.

7.4 Eine naive Schätzung für die Gluon-Masse *

Im Instanton-Flüssigkeits-Modell, in dem $A = \sum_I A_I$ eine Summe von Instantonen in singulärer Eichung mit festem Radius $\rho = 600\text{MeV}^{-1}$ ist, kann die Streuamplitude

$$\overline{V}_{\mu\nu} = (\overline{A^2} + \hat{p}\cdot\overline{A} + \overline{A}\cdot\hat{p})\delta_{\mu\nu} + 2i\overline{G}_{\mu\nu}$$

auf einfache Weise berechnet werden. Eine kurze Rechnung zeigt [40]

$$\overline{A_\mu} = \langle A_{I\mu}\rangle_I = 0 \quad , \quad \overline{G_{\mu\nu}} = 0 \tag{7.11}$$

$$\overline{A^2} = \langle A_I^2\rangle_I = \frac{12\pi^2 N_c}{N_c^2 - 1} n\rho^2\delta_{ab}$$

Hieraus ergibt sich für $M_1^2 = \overline{V} = \overline{A^2}$

$$M_1 = \sqrt{\frac{12\pi^2 N_c}{N_c^2-1}}\sqrt{n}\rho \approx 420\,\text{MeV} \quad , \tag{7.12}$$

wobei die Instanton-Dichte $n = (200\,\text{MeV})^4$ verwendet wurde. Dieser Wert stimmt gut mit den Ergebnissen von [38] und [39] überein.

Für große Impulse gibt es allerdings einen Term in M_2, der M_1 vollständig aufhebt. Aufgrund der asymptotischen Freiheit ist eine für große Impulse verschwindende Masse auch zu erwarten. Um dies im Detail zu sehen, kann man die Potenzen der $\hat{p}'s$ in M_2^2 zählen. $\overline{V}S_0\overline{V} = M_1^4/p^2$ verschwindet für große p. V enthält allerdings ein $\hat{p}$ im Zähler $(\hat{p}A)$ und $S_0 = 1/\hat{p}^2$. $\overline{VS_0V}$ kann somit für große p von Null verschieden sein. Betrachte

$$VS_0V = (pA + Ap)S_0(pA + Ap) + \text{weitere Terme} = 4A_\mu\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}A_\nu + \ldots$$

wobei $[p, A_I] = i\partial_\mu A_I^\mu = 0$ ausgenutzt wurde.

$$\langle x|VS_0V|y\rangle = 4A_\mu(x)\langle x|\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}|y\rangle A_\nu(y) + \ldots$$

Aus $\delta_{\mu\nu}\langle x|p_\mu p_\nu/p^2|y\rangle = \langle x|y\rangle = \delta(x-y)$ folgt $\langle x|p_\mu p_\nu/p^2|y\rangle = \frac{1}{4}\delta_{\mu\nu}\delta(x-y)$ + spurfreie Terme.

$$\langle x|VS_0V|y\rangle = A_\mu(x)A_\mu(x)\delta(x-y) + \ldots = \langle x|A^2|y\rangle + \ldots$$

Folglich enthält $M_2^2 = \overline{A^2} + \ldots = M_1^2 + \ldots$ einen Term, der M_1^2 vollständig eliminiert. In Kapitel 8 wird erklärt, warum in singulärer Eichung solche Auslöschungen zu erwarten sind.

Im nächsten Abschnitt präsentieren wir eine systematische Entwicklung des Propagators in der Instanton-Dichte.

7.5 Entwicklung in der Instanton-Dichte *

In diesem Abschnitt wird der Gluon-Propagator in der Instanton-Dichte n entwickelt. Diese Entwicklung ergibt zuverlässige Resultate für alle Euklidischen Impulse p, insbesondere für kleine Impulse. Weiterhin ist das Ergebnis eichinvariant.

Der Mittelwert einer beliebigen Potenz des ein-Instanton-Feldes ist proportional zum inversen Raumzeit-Volumen: $\overline{A_I^n} \sim \frac{1}{V}$ für $n \geq 1$. Die Entwicklung des Quadrats einer Multi-Instanton-Konfiguration in der Instanton-Dichte lautet

$$\overline{A^2} = \sum_{I=1}^{N} \overline{A^2} + \underbrace{N\overline{A_I}}_{O(n)}\underbrace{(N-1)\overline{A_I}}_{O(n)} = \underbrace{N\overline{A_I^2}}_{O(n)} + O(n^2) \tag{7.13}$$

und allgemeiner

$$\overline{A^n} = N\overline{A_I^n} + O(n^2) \quad , \quad \overline{V^n} = N\overline{V_I^n} + O(n^2) \quad \text{für} \quad n \geq 1, \tag{7.14}$$

wobei $V_I = V(A_I)$ definiert in (7.4) mit A ersetzt durch A_I ist. Summiert man alle in n linearen Terme in (7.10) auf, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{-1} &= (\mathbb{1} + \overline{T} - \overline{T^2} + \overline{T^3} - \ldots)S_0^{-1} + O(n^2) \\
&= (\mathbb{1} + N(\overline{T_I} - \overline{T_I^2} + \overline{T_I^3} - \ldots))S_0^{-1} + O(n^2) \\
&= (\mathbb{1} + N\overline{T_{eff}})S_0^{-1} + O(n^2) = S_0^{-1} + N\overline{V_{eff}} + O(n^2)
\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
T_{eff} &= T_I - T_I^2 + T_I^3 - \ldots = T_I - T_I(T_I - T_I^2 + \ldots) = T_I - T_I T_{eff} \\
V_{eff} &= V_I - V_I S_0 V_{eff} \quad \Longrightarrow \quad V_{eff} = S_0^{-1}(S_0 - S_I)S_0^{-1} \quad \text{mit} \qquad (7.16) \\
S_I^{-1} &= S_0^{-1} + V_I \quad \text{ist der Propagator im ein-Instanton-Vakuum.} \qquad (7.17)
\end{aligned}$$

Allgemein kann man eine Cluster-Entwicklung für eine beliebige Funktion von A durchführen:

$$\overline{f(A_1+\ldots+A_N)} = \overline{f(A)} = \sum_{l=0}^{N} \binom{N}{l} \overline{\sum_{k=0..l} (-)^{l-k} \binom{l}{k} f(A_1+\ldots+A_k)} = \tag{7.18}$$

$$= \underbrace{f(0)}_{O(1)} + \underbrace{N\overline{f(A_1)-f(0)}}_{O(n)} + \frac{1}{2}\underbrace{N(N-1)\overline{f(A_1+A_2)-2f(A_2)+f(0)}}_{O(n^2)} + O(n^3)$$

Die erste Zeile ist eine Identität (sogar ohne Mittelung). Setzt man für f eine Taylor-Entwicklung in die zweite Zeile ein und berücksichtigt man die Nicht-Unterscheidbarkeit verschiedener Instantonen, so sieht man, daß alle Monome im k-ten Term k oder mehr verschiedene Instantonen enthalten. Die Mittelung faktorisiert in k Faktoren, jeder proportional zu n. Somit ist der k-te Term tatsächlich von der Ordnung n^k. Es ist einfach (7.18) auf mehr als eine Feldspezies zu erweitern. Besteht A aus N_I Instantonen und $N_{\overline{I}}$ Anti-Instantonen, so erhält man in erster Ordnung in n:

$$\overline{f(A)} = f(0) + N_I\overline{f(A_I)-f(0)} + N_{\bar{I}}\overline{f(A_{\bar{I}})-f(0)} + O(n^2). \tag{7.19}$$

Setzt man in (7.19) den Propagator S ein, so erhält man

$$\overline{S} = \overline{S(A)} = S(0) + N\overline{S(A_I)-S(0)} + O(n^2) = S_0 + N\overline{S_I - S_0} + O(n^2) \tag{7.20}$$

Invertieren ergibt erneut (7.15) bis auf Terme der Ordnung n^2.

7.6 QCD Propagatoren *

In Abschnitt 7.5 sahen wir, daß es genügt, den ein-Instanton-Propagator zu kennen, um $\overline{S}$ in erster Ordnung n zu berechnen. Glücklicherweise ist dieser Propagator bekannt, doch ist der Ausdruck recht kompliziert und obendrein divergent.

Der Gluon-Propagator $S^{ab}_{I\mu\nu}$ mit Spin $S=1$ in adjungierter Farbdarstellung[1] ($C=1$) kann aus dem Geist-Propagator Δ^{ab}_I ($S=0, C=1$) berechnet werden, welcher explizit für den ein-Instanton-Hintergrund bekannt ist. Auf folgende Weise kann ein Propagator gegebenen Spins S in einem selbstdualen Hintergrund aus dem skalaren Propagator gleicher Farb-Darstellung C gewonnen werden:

Notation:

$$\begin{aligned} A_\mu &= T^a A^a_\mu \quad , \quad [T^a, T^b] = i\epsilon_{abc}T^c \quad , \quad T^a = \text{Generator von} \quad SU(2)_c \\ T^a &= \left\{ \begin{array}{rll} 0 & \text{in skalarer} & (C=0) \\ \tau^a/2 & \text{in fundamentaler} & (C=\frac{1}{2}) \\ i\epsilon_{\cdot a\cdot} & \text{in adjungierter} & (C=1) \end{array} \right\} \text{Farb-Darstellung} \end{aligned} \tag{7.21}$$

[1] Aus historischen Gründen manchmal Isospin genannt [18].

$$P_\mu = p_\mu + A_\mu \quad , \quad p_\mu = i\partial_\mu \quad , \quad \tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma} \quad , \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$$

Spin 0 *Propagator* $\tilde{\Delta}$*:*

$$\tilde{\Delta}^{-1} = P^2 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\Delta} = P^{-2} \tag{7.22}$$

Spin $\frac{1}{2}$ *Propagator* S*:*

$$S^{-1} = \not{P} = \gamma_\mu P^\mu \quad \Longrightarrow \quad S = \not{P}\tilde{\Delta}\frac{1+\gamma_5}{2} + \tilde{\Delta}\not{P}\frac{1-\gamma_5}{2} \quad \text{für} \quad G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} \tag{7.23}$$

Spin 1 *Propagator* S*:*

$$S^{-1}_{\mu\nu} = P^2\tilde{\Delta}_{\mu\nu} + 2iG_{\mu\nu} - (1-\frac{1}{\xi})P_\mu P_\nu \quad \Longrightarrow$$

$$S_{\mu\nu} = q_{\mu\nu\rho\sigma}P_\rho\tilde{\Delta}^2P_\sigma - (1-\xi)P_\mu\tilde{\Delta}^2P_\nu \quad \text{für} \quad G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}, \tag{7.24}$$

$$q_{\mu\nu\rho\sigma} = \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma} + \delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \quad .$$

Herleitung und Diskussion dieser Formeln findet man in [18]. Einige Kommentare sind an dieser Stelle angebracht. Obige Formeln sind gültig für beliebige Farb-Darstellung. Wir benötigen sie jedoch nur für die adjungierte Darstellung $C = 1$. Für $S \neq 0$ gibt es Nullmoden und der Propagator ist nur in einem zu den Nullmoden orthogonalen Unterraum das Inverse des Kernels. Implikationen und Probleme dieser Beobachtung werden in Abschnitt 7.8 diskutiert. Der Spin 1 Kernel ist der quadratische Term der QCD-Lagrange-Funktion (7.1) mit Eichfixierungs-Term $\frac{1}{2\xi}(D^{ab}_\mu B^b_\mu)^2$ in Verallgemeinerung des $\xi = 1$ Falles, der in den ersten Abschnitten untersucht wurde.

Mit

$$\Pi(x) = 1 + \frac{\rho^2}{x^2} \quad , \quad F(x,y) = 1 + \rho^2\frac{(\tau x)}{x^2}\frac{(\tau^\dagger y)}{y^2} \quad , \tag{7.25}$$

$$\tau_\mu = (\vec{\tau}, i) \quad , \quad \tau^\dagger_\mu = (\vec{\tau}, -i) \quad , \quad \tau_\mu\tau^\dagger_\nu = \delta_{\mu\nu} + i\bar{\eta}_{a\mu\nu}\tau_a$$

kann der Geist-Propagator für ein Instanton in der Form [18]

$$\begin{aligned}\Delta^{ab}_I(x,y) &= \frac{\frac{1}{2}\text{tr }\tau_a F(x,y)\tau_b F(y,x)}{4\pi^2(x-y)^2\Pi(x)\Pi(y)} = \qquad (7.26)\\ &= \frac{\delta_{ab}}{4\pi^2(x-y)^2} - \frac{\rho^2\delta_{ab}}{4\pi^2(x^2+\rho^2)(y^2+\rho^2)} + \frac{2\rho^2\epsilon_{abc}\bar{\eta}_{c\mu\nu}x_\mu y_\nu}{4\pi^2(x-y)^2(x^2+\rho^2)(y^2+\rho^2)}\\ &\quad + \frac{2\rho^4(((xy)^2 - x^2y^2)\delta_{ab} + \epsilon_{abc}\bar{\eta}_{c\mu\nu}x_\mu y_\nu(xy) + \bar{\eta}_{a\mu\nu}\bar{\eta}_{b\rho\sigma}x_\mu y_\nu x_\rho y_\sigma)}{4\pi^2(x-y)^2(x^2+\rho^2)x^2(y^2+\rho^2)y^2}\end{aligned}$$

geschrieben werden [18]. Zur Vereinfachung wurde das Instanton an den Ursprung $z_I = 0$ in Standard-Orientierung gesetzt. Mittels (7.24) ist es möglich den Gluon-Propagator $S^{ab}_{I\mu\nu}$ explizit auszuschreiben, dies führt allerdings auf einen sehr langen Ausdruck. Während Δ^{ab}_I exakt gemittelt und im Impulsraum mit Hilfe modifizierter Besselfunktionen dargestellt werden kann, scheint dies unmöglich für $S^{ab}_{I\mu\nu}$. Es ist also nötig, $\overline{S}$ für große oder kleine Impulse zu entwickeln. Letztendlich werden wir den vollen Ausdruck für S nicht benötigen.

7.7 Propagatoren für kleine Impulse *

Die Rechnung vereinfacht sich erheblich, wenn wir $\overline{\Delta}(p)$ und $\overline{S}(p)$ für kleine Impulse entwickeln. Da p immer in der dimensionslosen Kombination $(p\rho)$ auftritt, kann der führende Term für kleine p gefunden werden, indem nur ρ-Terme niedrigster Ordnung beibehalten werden. Mit anderen Worten: Kleine p entsprechen großen x und für $x \gg \rho$ kann ρ vernachlässigt werden. Beginnen wir mit dem Geist-Propagator Δ aus (7.26):

$$\Delta_I^{ab} = \Delta_0^{ab} - \rho^2 W^{ab} + O(\rho^4) \tag{7.27}$$

$$\Delta_0^{ab}(x,y) = \frac{\delta_{ab}}{4\pi^2(x-y)^2}$$

$$W^{ab}(x,y) = \frac{\delta_{ab}}{4\pi^2 x^2 y^2} + \frac{2\epsilon_{abc}\bar{\eta}_{c\mu\nu}x_\mu y_\nu}{4\pi^2(x-y)^2 x^2 y^2}$$

$\Delta_0(p) = 1/p^2$ ist der freie ($A_\mu^a \equiv 0$) Geist-Propagator. Nach Restaurierung der Instanton-Position z und -Orientierung U kann begonnen werden $\Delta_0 - \Delta_I$ zu mitteln. Der ϵ-Term in W wird durch Mittelung über die Instanton-Orientierung eliminiert:

$$\langle x|\overline{\Delta_0^{ab} - \Delta_I^{ab}}|y\rangle = 4\pi^2\delta_{ab}\rho^2 \frac{1}{V_4}\int \frac{d^4z}{4\pi^2(x-z)^2 4\pi^2(z-y)^2} \quad , \tag{7.28}$$

Dieses Integral ist Infrarot-divergent. Nutzt man aus, daß $1/4\pi^2(x-y)^2$ die Fourier-Transformation von $1/p^2$ ist, so kann man das Integral zu

$$V_4\langle x|\overline{\Delta_0 - \Delta_I}|y\rangle = 4\pi^2\rho^2 \int d^4z \langle x|\frac{1}{p^2}|z\rangle\langle z|\frac{1}{p^2}|y\rangle = 4\pi^2\rho^2\langle x|\frac{1}{p^4}|y\rangle$$

umschreiben. Die Divergenz ist nun in der Tatsache verborgen, daß die Ortsdarstellung von p^{-4} nicht existiert. Letztendlich sind wir aber nicht an der Ortdarstellung, sondern an der Impulsdarstellung interessiert. Daher wirkt sich die Divergenz nicht dramatisch aus. Einsetzen von Δ in (7.16) ergibt

$$\overline{V}_{eff}^{ghost} = \Delta_0^{-1}\,\overline{\Delta_0 - \Delta_I}\,\Delta_0^{-1} = p^2\frac{4\pi^2\rho^2}{V_4}\frac{1}{p^4}p^2 = \frac{1}{V_4}4\pi^2\rho^2 = \rho^2 p^4 \overline{W} \tag{7.29}$$

und führt im $SU(2)_c$-Fall zu einer Geist-Masse von

$$M_{ghost}^2(p=0) = N\overline{V}_{eff} = 4\pi^2\rho^2 n$$

die in den Geist-Propagator $\overline{\Delta}_{ab} = \delta_{ab}(p^2 + M_{ghost}^2(p))^{-1}$ einzusetzen ist. Verallgemeinerung auf den Fall von N_c Farben ergibt

$$M_{ghost}(p=0) = 2\pi\rho\sqrt{2n_R} = 8.9\rho\sqrt{n_R} = 340\,\mathrm{MeV} \tag{7.30}$$

wobei $n_R := n/N_c$ von der Ordnung $O(N_c^0)$ ist. Die wichtigste Erkenntnis hieraus ist, daß $M \neq 0$ ist. Ein skalares Teilchen in adjungierter Farbdarstellung nimmt im Instanton-Hintergrund eine dynamische Masse an.

Widmen wir uns nun der Gluon-Masse bei kleinen Energien. Dazu muß (7.27) in (7.24) eingesetzt werden. Entwicklet man P_μ bis zur Ordnung ρ^2

$$P_\mu = p_\mu + \rho^2 \breve{A}_\mu + O(\rho^4) \quad , \quad \breve{A}_\mu = \frac{2F_a \bar{\eta}_{a\mu\nu} x_\nu}{x^4}$$

so erhält man

$$P_\mu \Delta_I^2 P_\nu = p_\mu \Delta_0 p_\nu - \rho^2 p_\mu (\Delta_0 W + W\Delta_0) p_\nu + \rho^2 (p_\mu \Delta_0 \breve{A}_\nu + \breve{A}_\mu \Delta_0 p_\nu) + O(\rho^4) \quad .$$

Der freie Gluon-Propagator in R_ξ-Eichung ist

$$S^0_{\mu\nu} = q_{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho \Delta_0^2 p_\sigma - (1-\xi) p_\mu \Delta_0^2 p_\nu = \frac{1}{p^2}(\delta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}) \quad .$$

Nutzt man aus, daß p mit gemittelten Größen wie $\overline{W}$ kommutiert, so erhält man

$$\begin{aligned}
S^0_{\mu\nu} - S^I_{\mu\nu} &= \rho^2 [q_{\mu\nu\rho\sigma} p_\rho (\Delta_0 W + W\Delta_0) p_\sigma - (1-\xi) p_\mu (\Delta_0 W + W\Delta_0) p_\mu] \\
\overline{S^0_{\mu\nu} - S^I_{\mu\nu}} &= 2\rho^2 \overline{W}(p^2 \delta_{\mu\nu} - (1-\xi) p_\mu p_\nu) = 2\rho^2 p^2 \overline{W} S^0_{\mu\nu} \\
\overline{V}^{gluon}_{eff} &= S_0^{-1} \overline{S_0 - S_I} S_0^{-1} = 2\rho^2 p^2 S_0^{-1} \overline{W} \\
\overline{S}^{-1} &= S_0^{-1} + N \overline{V^{gluon}_{eff}} = S_0^{-1}(1 + 2M^2_{ghost}(0)/p^2) \\
\overline{S} &= \frac{p^2 S_0}{p^2 + M^2_{ghost}(0)} = \frac{\delta_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}}{p^2 + M^2_{gluon}(p^2)} \quad \text{mit} \\
M^2_{gluon}(p^2) &= 2M^2_{ghost}(0) + O(p^2)
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Wir erhalten somit das interessante Resultat, daß bei Impulstransfer 0 die Gluon-Masse um den Faktor $\sqrt{2}$ größer ist als die Geist-Masse. Vielleicht ist die Relation $M_{gluon} \approx \sqrt{2} M_{ghost}$ auch für größere p gültig. Die Gluon-Masse bei Impulstransfer Null ist

$$M_{gluon}(p=0) = 4\pi\rho\sqrt{n_R} = 12.6\rho\sqrt{n_R} = 480\,\mathrm{MeV} \tag{7.32}$$

7.8 Nullmoden *

Bisher haben wir das Problem der Nullmoden ignoriert. Alle Gluon-Feld-Fluktuationen müssen orthogonal auf diesen stehen, was durch einen auf den Nullmoden orthogonalen Gluon-Propagator erreicht wird. Von (7.24) muß folglich die Projektion auf den Nullmodenraum subtrahiert werden. Dies eliminiert auch eine Divergenz, die durch Quadrieren des zweiten Terms in (7.26) entsteht. Ein weiteres Problem ist, daß das Skalarprodukt der Nullmoden mit dem Propagator nicht existiert [18]. Alle diese Probleme betreffen Terme, die Proportional zu ρ^4 sind; sie sind somit gegenstandslos für $p^2 = 0$. Ein weiteres Indiz, daß die Massenerzeugung nicht von den Nullmoden abhängt, ist der Geist-Propagator, da es im Spin-0-Fall keine Nullmoden gibt. Dies sollte mit dem Quark-Propagator verglichen werden, in dem die Nullmoden für die Massenerzeugung verantwortlich sind, und die sogenannte Nullmoden-Approximation die Berechnungen enorm vereinfacht.

7.9 Zusammenfassung & Ausblick

Der Gluon-Propagator wurde im Instanton-Flüssigkeits-Modell für kleine Impulse p in führender Ordnung in der Instanton-Dichte berechnet. Eine von N_c unabhängige Masse konnte extrahiert werden. Weiterhin ist die Masse eichunabhängig, zumindest für $p^2 = 0$ innerhalb der Klasse der R_ξ Eichungen. Für $\xi \to 0$ ist der Gluon-Propagator, wie zu erwarten, transversal.

Für $\xi \neq 1$ bleibt ein masseloser Pol aufgrund des $(1-\xi)p_\mu p_\nu/p^2$ Terms bestehen. Es ist zu erwarten, daß der mit diesem Pol assoziierte masselose Zustand von physikalischen Matrix-Elementen entkoppelt, wie in der gewöhnlichen Störungstheorie.

Der Wert für die Gluon-Masse $M_{gluon} = 480$ MeV stimmt mit der von Cornwall ermittelten Gluon-Masse von 500 ± 200MeV überein [38] und ist konsistent mit den aus Proton-Proton-Streuung extrahierten Werten (370MeV) [39].

Der nächste Schritt sollte die Berechnung eichinvarianter Korrelations-Funktionen sein, wie den Glue-Ball Korrelatoren oder der topologischen Suszeptibilität. Hierzu müssen Produkte bzw. Faltungen von mehreren Propagatoren berechnet werden. Statt des freien Propagators, der in der Störungstheorie verwendet wird, muß auch hier der Propagator im ein-Instanton Vakuum (7.24) verwendet werden. Ohne weitere drastische Vereinfachungen dürfte dies ein relativ schwieriges Vorhaben sein.

Kapitel 8

Eichinvarianter Quarkpropagator

Mit Hilfe des Instanton-Flüssigkeit-Modells war es möglich quantitative Vorhersagen zu machen, bzgl. chiraler Symmetriebrechung und bzgl. der leichtesten Mesonen in vielen Kanälen. Trotz großer Anstrengungen, dieses Modell aus ersten Prinzipien abzuleiten, ist es immer noch unklar ob Instantonen wohlsepariert sind oder miteinander verschmelzen. Somit bleibt das Infrarot-Problem ungelöst. Dieser Abschnitt ist der Versuch einige Vorhersagen zu machen, ohne sich auf das Instanton-Flüssigkeits-Modell zu stützen, sondern die theoretische ein-Schleifen Instanton-Dichte $D(\rho)$ zu verwenden.

In den Abschnitten 8.5 und 8.6, wird das Quark-Kondensat berechnet. Durch Wahl einer geeigneten Eichung und durch Aufsummieren der Selbstenergien erhalte ich ein endliches Resultat, ohne einen Infrarot-Cutoff in der Instanton-Dichte einzuführen.

Da die Endlichkeit wesentlich von der Wahl der Eichung abhängt, möchte ich vorher in Abschnitt 8.1, 8.2 und 8.3 allgemein diskutieren, welche Eichung für die Berechnung eichabhängiger Größen zu verwenden ist. Der Quark-Propagator in wohlbekannter regulärer und singulärer Eichung wird mit einem eichinvarianten Propagator verglichen, der in Abschnitt 8.4 berechnet wird.

8.1 Allgemeines über die Wahl einer geeigneten Eichung

Die Eichsymmetrie ist eine sehr große Symmetrie, ein unendliches Produkt von $SU(N_c)$ im Falle der QCD. Jeder Physiker ist erfreut über Symmetrien, da mit ihrer Hilfe Vorhersagen gemacht werden können, auch ohne die Theorie explizit zu lösen. Die Eichsymmetrie ist notwendig, um ein physikalisches Spektrum der Vektor-Bosonen zu bekommen. Solange keine Approximation gemacht wird, die die Eichinvarianz manifest bricht, kann man eine für die Rechnung angenehme Eichung verwenden, da das Ergebnis eichinvariant ist. Allerdings ist es schwierig, die Eichinvarianz *nicht* zu brechen, insbesondere in einer nichtabelschen Eichtheorie. Es ist nicht einfach eine eichinvariante Regularisierung zu finden,

auch ist der Gluon-Propagator, eine fundamentale Größe in der Störungstheorie, eichabhängig. Natürlich ist es inzwischen wohlbekannt, wie eichinvariante Berechnungen in jeder Ordnung Störungstheorie durchzuführen sind, indem man Faddeev-Popov-Geister einführt und dimensional regularisiert. Jeder neue, über die Störungstheorie hinausgehende Ansatz, ist erneut mit dem Problem der Eichinvarianz konfrontiert. In der Gitter-Eichtheorie mußte die Wilson-Wirkung erfunden werden. In Selbstkonsistenz-Gleichungen vom Typ Schwinger-Dyson und Bethe-Salpeter ist Eichinvarianz immer noch ein offenes Problem. In der Instanton-Physik ist die Wahl der Eichung ebenfalls wichtig, sobald man über die ein-Instanton-Approximation hinausgeht. Dies wird ausführlicher in Abschnitt 8.3 diskutiert. Ein ähnliches Problem ergibt sich, wenn man bewußt nicht-eichinvariant Objekte, wie den Gluon- und Quark-Propagator, untersucht. Streng genommen sind diese nur *definiert* in Bezug auf eine konkrete Eichung. Im Prinzip sollte man ihnen keinerlei physikalische Bedeutung zukommen lassen. Da man oftmals verführt, ist dies doch zu tun, ist es notwendig die Wahl dieser oder jener Eichung physikalisch zu motivieren.

8.2 Eine natürliche Eichung

Das Eichfeld A^a_μ beschreibt die Konnektion zwischen benachbarten Vektorbündeln über der Raumzeit-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^4$. D.h. die Wahl einer Eichung entspricht der Wahl eines Koordinatensystems in der allgemeinen Relativitätstheorie mit Konnektion $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$. Wählt man ein sehr krummliniges Koordinatensystem, obwohl man ein sehr glattes Universum beschreiben möchte, entstehen riesige Schein-Beschleunigungen, die die physikalischen Beschleunigungen weitgehend verdecken:

$$\ddot{x}^\mu_{phys} = \ddot{x}^\mu_{fict} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\dot{x}^\nu\dot{x}^\rho \quad .$$

Führt man allgemein kovariante Berechnungen durch, dann werden diese fiktiven Beschleunigungen von den Γ-Beiträgen aufgehoben, und man erhält das korrekte kleine Resultat. Die kleinste unsystematische Approximation allerdings führt zu großen Fehlern. Die natürliche Lösung dieses Problems ist, ein Koordinationsystem zu benutzen, das so glatt wie möglich ist, um virtuelle Beschleunigungen zu vermeiden, d.h. $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ so klein wie möglich zu wählen. Um diese Aussage etwas zu quantifizieren, könnte man z.B. versuchen $(\ddot{x}^\mu_{phys} - \ddot{x}^\mu_{fict})^2$ simultan für alle Kurven zu minimieren. Dies wird durch Wahl eines Koordinatensystems erreicht, das

$$||\Gamma||^2 \;:=\; \int \Gamma_\mu{}^{\nu\rho}\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\, d^4x$$

minimiert[1]. Diese Norm mißt offensichtlich die Krummheit des Koordinatensystems.

Übertragen wir dies nun auf die QCD: Die analoge Norm für das Eichpotential ist

$$||A||^2 \;:=\; \int \mathrm{tr}_c\, A_\mu A^\mu\, d^4x$$

[1]Im Euklidischen ist diese Norm positiv definit

Ein stationärer Punkt kann durch Variation von $||A||$ bzgl. Eichtransformationen gewonnen werden

$$\delta A_\mu = i[A_\mu, \Omega] + \partial_\mu \Omega \quad , \quad \delta||A||^2 = 2i \int tr(\partial_\mu A^\mu)\Omega d^4x = 0 \quad \forall \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

Folglich enthält A^a_μ in Lorentz-Eichung so wenig reine Eichung wie möglich, falls der stationäre Punkt ein Minimum ist. Eine Entwicklung in A ist also in Lorentz-Eichung am schnellsten konvergent. In Anwendungen, in denen A nicht überall benötigt wird, sondern in denen z.B. nur ein bestimmter Impulsbereich dominiert, können andere Normen und andere Eichungen optimal im oben diskutierten Sinne sein. Insbesondere sollten Ableitungen von A in die Norm aufgenommen werden, um ein glattes A zu garantieren, was bei großen Energien wichtig wird.

8.3 Über die Wahl einer Eichung in der Instanton-Physik

Bei der Berechnung von eichinvarianten Größen im ein-Instanton-Vakuum in einer eichinvarianten Weise ist die Wahl der Eichung Geschmackssache. Allerdings treten große Auslöschungen zwischen verschiedenen Termen in regulärer Eichung bei großen Abständen wegen des langsamen Abfalls und in singulärer Eichung bei kleinen Abständen wegen der topologischen Singularität in der Mitte des Instantons auf. Für nicht-eichinvariante Größen, wie dem Gluon- oder Quark-Propagator, oder bei Verwendung unsystematischer Approximationen lernen wir hieraus singuläre/reguläre Eichung bei niedrigen/hohen Energien zu verwenden, um diese Auslöschungen zu vermeiden. Diese Regel ist konsistent mit der Diskussion des vorigen Paragraphen. Singuläre als auch reguläre Eichung erfüllen die Lorentzbedingung. $||A_{sing}||$ ist endlich und minimal. A_{sing} ist daher eine gute Eichung bei kleinen Energien. Für hohe Energien ist es wichtig, daß A möglichst glatt ist, was offensichtlich nur für die reguläre Eichung zutrifft.

Um Instantonen linear überlagern zu können, müssen sie genügend schnell abfallen. Deshalb muß man die singuläre Eichung verwenden. Dieses Argument kann im Prinzip umgangen werden, indem zwei Felder A_N and $A_{\overline{N}}$ linear überlagert werden, wobei ersteres/letzteres eine exakte Multi-Instanton/Multi-Anti-Instanton Konfiguration in regulärer Eichung ist. Abgesehen von dieser mehr theoretischen Möglichkeit ist für niedrige Energien die singuläre Eichung so oder so eine gute Wahl und für hohe Energien liefert bereits eine ein-Instanton-Approximation gute Ergebnisse.

8.4 Der Quark-Propagator in axialer Eichung *

Der Quark-Propagator ist ein Beispiel, die Eichabhängigkeit zu testen. Der Beitrag eines Instantons mit Radius ρ zu $M_\rho(p) = ip^2 \bar{S}_I(p)$, häufig als Konstituenten-Masse interpretiert, ist in regulärer, singulärer und axialer Eichung in Abbildung B.2 graphisch dargestellt. Die reguläre Masse ist größer als die singuläre bei kleinen Impulsen, die singuläre

Masse zeigt ein langsames Abfallverhalten (polynomiell in $1/p$) für große Impulse. Die wohlbekannten analytischen Ausdrücke sind in Anhang A.2 aufgeführt, zusammen mit den Ausdrücken in axialer Eichung, die im folgenden hergeleitet und diskutiert werden.

Ein Korrelator, der Farb-nicht-Singlett Operatoren enthält, kann eichinvariant gemacht werden. Dazu werden entfernte Punkte mit einem speziellen pfadgeordneten Exponential, welches das Eichfeld enthält, verbunden. Das Exponential (Wilson-Linie) garantiert Paralleltransport der Farbe von einem Punkt zum anderen. Der eichinvariante Quark-Propagator kann symbolisch als

$$S_{ax}(x,y) = \langle 0|\Psi(x) P \exp\left(i\int_x^y dz\cdot A(z)\right)\bar{\Psi}(y)|0\rangle \tag{8.1}$$

geschrieben werden, wobei P Pfadordnung bedeutet. Dabei haben wir S_{ax} bereits als Farb-Singulett definiert, da nur der Singulett-Anteil eichinvariant ist. S_{ax} wird axialer Propagator genannt, da in axialer Eichung mit $n_\mu = x_\mu - y_\mu$ das Exponential verschwindet. Im ein-Instanton-Vakuum in Nullmoden-Approximation erhalten wir

$$S_{ax}(x,y) = \frac{\mathbb{1}_c}{N_c} tr_c \left[P\exp\left(i\int_x^y dz\cdot A_I(z)\right)\psi(x)\bar{\psi}(y)\right] \quad ,$$

wobei A_I das Instanton-Feld und ψ die Nullmode in beliebiger Eichung sind. In einem Koordinatensystem, in dem das Instanton am Ursprung sitzt und $x-y$ in Zeitrichtung zeigt[2] ($\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{z}$) reduziert sich das pfadgeordnete Exponential auf eine gewöhnliche Exponentialfunktion, da die zu exponenzierende Farb-Matrix konstant, d.h. unabhängig z ist. Alternativ hätte man auch versuchen können, eine Eichtransformation zu finden, die die reguläre Eichung in die axiale Eichung transformiert. In beiden Fällen erhalten wir:

$$S_{ax}(x,y) = \frac{1}{N_c} tr_c\left[\psi_{ax}(x)\bar{\psi}_{ax}(y)\right] \quad , \quad \psi_{ax}(x) = R(x)\psi_{reg}(x), \tag{8.2}$$

$$R(x) = e^{\pm i\alpha(x)\frac{\tau\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}} = \cos\alpha(x) \pm i\frac{\tau\cdot\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\sin\alpha(x) =: \pm i\tau_\mu^\pm \tilde{x}^\mu(x) \tag{8.3}$$

$$\alpha(x) = \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\rho^2}}\arctan\frac{x_0}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\rho^2}} \tag{8.4}$$

Es ist möglich $\alpha(x)$ kovariant zu schreiben

$$\alpha(x) = \pm\left(1+\frac{\rho^2(x-y)^2}{x^2y^2-(xy)^2}\right)^{-1/2}\arctan\sqrt{\frac{(x^2-(xy))^2}{x^2y^2-(xy)^2+\rho^2(x-y)^2}} \quad ,$$

aber nun hängt $\alpha(x)$ ebenso von y ab und der Ausdruck für den Propagator faktorisiert nicht länger. Der Grund hierfür ist, daß die axiale Eichung nicht kovariant ist, aber die Definition des Propagators sehr wohl. Setzt man (8.3) und (8.8) in (8.2) ein, so erhält man

$$S_{ax}(x,y) = \frac{1}{N_c}\left((\tilde{x}\tilde{y}) - \frac{1}{2}\tilde{x}_\mu\tilde{y}_\nu\sigma^{\mu\nu}\right)\frac{1\pm\gamma_5}{2}\varphi_{reg}(x)\varphi_{reg}(y) \quad . \tag{8.5}$$

[2]Obwohl wir im Euklidischen arbeiten, wird die Minkowski-Sprechweise $(x_0, \mathbf{x})$ = (Zeit, Ort) übernommen.

Durch Einsetzen von (8.3), (8.4) und (8.8) in (8.5) kann der Raumzeit-gemittelte Propagator als Integral elementarer Funktionen ausgedrückt werden:

$$\bar{S}(x-y) = \int_0^\infty dr \int_{-\infty}^\infty dt\, 4\pi r^2 \cos\left[\frac{r}{R}\left(\arctan\frac{t+|x-y|}{R} - \arctan\frac{t}{R}\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{2N_c}\frac{\rho^2}{\pi^2(R^2+(t+|x-y|)^2)^{3/2}(R^2+t^2)^{3/2}} \quad , \quad R^2 = r^2+\rho^2$$

Der Unterschied zwischen dem Propagator in regulärer und singulärer Eichung ist der Einschub des cos[...] Faktors. Folglich ist der axiale Propagtor in Ortsdarstellung überall kleiner als der reguläre Propagator, außer für $x = y$ wo sie übereinstimmen, da dort das pfadgeordnete Exponential identisch 1 ist. Für große Abstände ist er um den Faktor $\pi/4$ kleiner. Anstatt die Integrationen im Ortsraum auszuführen, wenden wir uns direkt der interessanteren Darstellung im Impulsraum zu:

$$\bar{S}_I(p) = \frac{1}{2N_c}\varphi^\mu_{ax}(p)\varphi^{\mu\dagger}_{ax}(p) \quad , \quad \varphi^\mu_{ax}(p) = \int \tilde{x}^\mu(x)\varphi_{reg}(x)e^{ipx}dx \tag{8.6}$$

Obwohl φ^μ_{ax} nicht wie ein Vektor transformiert, kann man dennoch für p eine zweckmäßige Richtung wählen, da $\varphi\varphi^\dagger$ ein Lorentz-Skalar ist. Für rein raumartiges p verschwinden die räumlichen φ-Komponenten, da der Integrand antisymmetrisch bzgl. Zeitreflexion ist. Nur die Zeitkomponente ist nichttrivial

$$\varphi_{ax}(p) := \varphi^0_{ax}(p) = \int d^3r \int dt\, \cos\left[\frac{r}{R}\arctan\frac{t}{R}\right]\frac{\rho}{\pi(R^2+t^2)^{3/2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

Folgende Hinweise

$$\begin{aligned}
\cos(\gamma\arctan x) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^{\gamma/2} \\
\int_{-\infty}^\infty (R-it)^{-\alpha}(R+it)^{-\beta}dt &= 2\pi(2R)^{1-\alpha-\beta}\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \\
\Gamma(\frac{3}{2}-x)\Gamma(\frac{3}{2}+x) &= \frac{(\frac{1}{4}-x^2)\pi}{\cos\pi x} \\
\int d^3r\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} f(r) &= \frac{2\pi}{p}\int_0^\infty f(r)\sin(pr)r\,dr
\end{aligned} \tag{8.7}$$

sollten dem Leser ermöglichen, die t und die Winkelintegration $d\Omega_r$ durchzuführen

$$\varphi_{ax}(p) = \frac{8}{p\rho}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi r}{2R}\right)\sin(pr)r\,dr \quad . \tag{8.8}$$

Die letzte Integration kann nicht analytisch ausgeführt werden, aber für kleine Impulse kann man leicht sehen, daß $\varphi_{ax}(p)$ wie $\pi^2\rho/p$ wächst. Für große p fällt es wie $\sim e^{-p\rho}$ ab, mit einem nicht-polynomiellen Koeffizienten aufgrund einer wesentlichen Singularität bei $r = \pm i\rho$. Vergleicht man φ_{reg}, φ_{sing} und φ_{ax}, geplottet in Abbildung B.2, so kann man erkennen, daß das axiale φ zwischen dem regulären und dem singulären liegt. Daraus kann man schließen, daß die axiale Eichung ein guter Kompromiß für alle Impulse ist.

Die Berechnung des eichinvarianten Propagators scheint eine Diskussion seiner eichabhängigen Partner überflüssig zu machen. Ich werde nun einige Argumente anführen, warum dies nicht der Fall ist. Der Grund hierfür ist, daß es eine enorme Menge an eichinvarianten Definitionen für einen Quark-Propagator gibt und (8.1) ist nur eine mögliche Wahl. Eine offensichtliche Verallgemeinerung ist, einen komplizierteren Pfad als eine gerade Linie von x nach y zu wählen. Als nächstes könnte man sich nicht auf einen spezifischen Pfad beschränken, sondern über alle Pfade, an denen man interessiert ist, beliebig gewichtet mitteln. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, den Pfad selbst von der Eichfeld-Konfiguration abhängig zu machen, solange die Abhängigkeit in eichinvarianter Weise erfolgt. Zu guter letzt ließen sich beide Verallgemeinerungen noch kombinieren. Vermutlich kann jedes gewünschte Resultat für den Propagator mit Hilfe einer geeigneten Definition erzeugt werden. Der Vorteil des standard axialen Propagators ist, daß die Definition einfach ist und daß der nicht-lokale Operator eine physikalische Interpretation besitzt: Er erzeugt ein durch einen dünnen Gluon-Flußschlauch verbundenes Quark-Antiquark-Paar. Möglicherweise ist dies eine gute Wahl für einen nicht-lokalen Meson-Erzeugungs-Operator. Allerdings ist es ebenso plausibel, daß eine der oben erwähnten Verallgemeinerungen noch besser ist. Mit dieser Diskussion wollte ich hervorheben, daß die Verwendung des hier eingeführten eichinvarianten Propagators letztlich nur bedeutet, in axialer Eichung zu arbeiten. Die Wahl einer geeigneten Eichung bleibt weiterhin ausgefeilten Argumenten vorbehalten.

8.5 Effektive Quark-Masse *

Im folgenden wird im $N_c \to \infty$ Limes gearbeitet. Der einzige Grund, diesen Limes durchzuführen, ist, die Form der Ergebnisse übersichtlich zu halten. Für $N_c = 3$ stimmen die Resultate mit den exakten Formeln auf 10% überein. Dies ist die Standardgenauigkeit, die häufig in der $1/N_c$-Entwicklung erreicht wird. In diesem Fall kann die hohe Genauigkeit leicht verstanden werden. Der Expansionsparameter ist nämlich nicht $1/N_c = 1/3$, sondern in der Tat $1/b \approx 1/11$. Folgende asymptotischen Formeln werden wir benötigen

$$N_c!^{1/N_c} \stackrel{\bullet}{=} N_c/e \quad , \quad b \stackrel{\bullet}{=} \frac{11}{3} N_c \quad , \quad C_{N_c}^{1/b} \stackrel{\bullet}{=} 2.22 b^{-6/11}$$

$$\rho^5 D(\rho) \sim (2.22 (S_0/b)^{6/11} \rho \Lambda)^b \quad , \quad S_0/b = \frac{24\pi^2}{11} (g_0^2 N_c)^{-1} \quad . \tag{8.9}$$

Jede Gleichung, die für $N_c \to \infty$ exakt wird, ist mit einem Punkt markiert. Beachten Sie, daß in diesem Limes Instantonen der Größe $\rho < \frac{1}{2.22} (S_0/b)^{-6/11} \Lambda^{-1}$ vollständig unterdrückt sind. Oberhalb dieser Schranke wird die Instantondichte unendlich. S_0/b ist unabhängig von N_c, da die Kopplung $g_0 \sim 1/\sqrt{N_c}$ ist. Λ ist die QCD-Skala.

In Anwesenheit leichter Quarks muß die Instanton-Dichte $D(\rho)$ mit der Funktional-Determinante des Dirac-Operators multipliziert werden:

$$Det(i\not{D} + im) \approx 1.34 m \rho$$

Die Dichte ist nun proportional zu m aufgrund einer Nullmode von $\not{D}$. Der Quark-Propagator im ein-Instanton Vakuum wird durch diese Nullmode dominiert

$$S_I(p,q) = \frac{\psi_I(p)\psi_I^\dagger(q)}{im}$$

Mittelt man diesen Ausdruck über alle kollektiven Koordinaten γ_I, so erhält man:

$$M(p) := \int d\gamma_I \; ip^2 S_I(p) = \frac{1.34}{2N_c}\int_0^\infty d\rho\, p^2 \rho D(\rho)\varphi^2(p)$$

Man beachte, daß im Gegensatz zu $M_\rho(p)$ im Instanton-Flüssigkeits-Modell hier über alle Instanton-Radien integriert wird. Aufsummation der $0, 1, 2, 3, \ldots$ Instanton-Beiträge zum Propagator in Analogie zur Aufsummation der Selbstenergie in der Störungstheorie

$$S(p) = \frac{1}{\not{p}} + \frac{1}{\not{p}}\frac{M(p)}{i}\frac{1}{\not{p}} + \frac{1}{\not{p}}\frac{M(p)}{i}\frac{1}{\not{p}}\frac{M(p)}{i}\frac{1}{\not{p}} + \ldots = \frac{1}{\not{p} + iM(p)}$$

rechtfertigt es, $M(p)$ 'dynamische Quarkmasse' zu nennen. In Anhang A.2 sind Ausdrücke für φ in den verschiedenen Eichungen angegeben. Die Graphen von $\varphi(p)$ in singulärer und regulärer Eichung schneiden sich bei

$$\varphi_{sing}(p) = \varphi_{reg}(p) \quad \Longleftrightarrow \quad 2p\rho \approx 2.5$$

Aus diesem Grund sollte man die reguläre Eichung für große Instanton-Radien ρ und die singuläre Eichung für kleine ρ wählen. Diese Eichwahl sorgt auch für die Konvergenz der ρ-Integration für große ρ. An dieser Stelle haben wir somit kein Infrarot-Problem. Benutzt man die reguläre Eichung im ganzen Integrations-Intervall so erhält man

$$M_{reg}(p) = Bp(\frac{\Lambda}{2p})^b \quad , \quad B = 1.34 \cdot 16\pi^2 (C_{N_c} b^{2N_c})(S_0/b)^{6b/11} I_b/N_c$$

$$I_b = \int_0^\infty dz\, z^{b-2} e^{-z} = (b-2)! \quad , \quad z = 2p\rho \quad .$$

Das Integral wird stark dominiert für

$$z \stackrel{\bullet}{=} b \pm b^{1/2} >> 2.5$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Eichung für $z < 2.5$ und rechtfertigt somit die Verwendung der regulären Eichung für das ganze Intergrations-Intervall. Verwendung der axialen Eichung führt auf ein ähnliches Resultat, wie in Abbildung B.2 zu erkennen ist. Verwendung der singulären Eichung würde zu einem für große ρ divergierenden Integral führen, welches durch beliebig große Instantonen dominiert wird. Diese Wahl widerspricht auch der im vorigem Paragraphen geführten Diskussion. Das Infrarot-"Problem" macht sich im schnell wachsenden $M(p)$ für kleine p bemerkbar, was effektiv die Propagation von Quarks kleiner Virtualität p^2 unterdrückt. Betrachte einen Prozess, der Quarks bei Abständen $x = 1/p_c$ sondiert. Die effektive Quarkmasse $M(1/x)$ wird durch viel größere Instantonen dominiert

$$\rho = \rho_c(1 \pm b^{-1/2}) >> x \quad , \quad \rho_c = \frac{b}{2p_c} \quad .$$

Mit anderen Worten: Ein gegebenes Instanton mit Radius ρ beeinflußt die Physik auf viel kleineren Längenskalen $x = \frac{2}{b}\rho << \rho$. Daher wird das Innere eines Instantons sondiert und man sollte die Singularität an seinem Ursprung durch Verwendung der regulären Eichung vermeiden.

8.6 Das Quark-Kondensat

Wir wollen nun eine echte physikalische Observable, das Quark-Kondensat, berechnen:

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle := \lim_{x\to 0} \mathrm{tr}_{CD}(S(x) - S_0(x)) = -4iN_c \int d^4p \frac{M(p)}{p^2 + M^2(p)}$$

Einsetzen von $M(p)$ und Ausführen der Winkelintegration ergibt:

$$|\langle\bar{\psi}\psi\rangle| = \frac{N_c}{16\pi^2} B^{3/b} J_b \Lambda^3$$

$$J_b = \int_0^\infty \frac{z^{b+2}}{1+z^{2b}} dz = \frac{\pi}{2b\sin(\frac{b+3}{2b}\pi)} \stackrel{\bullet}{=} \frac{\pi}{2b} \quad , \quad p = B^{1/b}\frac{\Lambda}{2} z$$

Das Integral ist endlich und scharf dominiert durch $z \stackrel{\bullet}{=} 1 \pm b^{-1}$. Ohne Aufsummieren der Selbstenergie hätte sich das Integral J_b und damit das Kondensat als unendlich herausgestellt. Das Kondensat ist dominiert durch Quark-Wellenfunktionen mit Impuls

$$p = p_c(1 \pm b^{-1}) \quad , \quad p_c = \beta b \frac{\Lambda}{2} \quad , \quad \beta := \frac{1}{b} B^{1/b} \stackrel{\bullet}{=} \frac{2.22}{e} (S_0/b)^{6/11}$$

und hängt parametrisch von Λ und g_0 ab:

$$|\langle\bar{\psi}\psi\rangle|^{1/3} = 0.139\beta b\Lambda \quad .$$

Drückt man p_c und ρ_c durch $|\langle\bar{\psi}\psi\rangle|$ aus, indem man β eliminiert, so erhalten wir unser Hauptresultat

$$\begin{aligned} p_c &= 3.59|\langle\bar{\psi}\psi\rangle|^{1/3} \\ \rho_c &= \frac{1.96}{N_c}|\langle\bar{\psi}\psi\rangle|^{1/3} \\ 2.22N_c\Lambda &= (g_0^2 N_c)^{6/11}|\langle\bar{\psi}\psi\rangle|^{1/3} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Ein schwacher Punkt der letzten Gleichung ist die experimentelle Bestimmung von g_0. g_0 sollte aus einem geeigneten tree-level Prozeß bei niedrigen Energien, vermutlich von der Größenordnung ρ_c^{-1}, gewonnen werden. In QCD-verbesserten Bag-Modellen ist der wesentlich nicht-perturbative Effekt durch die Bag modelliert und die Hyperfeinaufspaltung wird durch einen ein-Gluon Austausch verursacht. Aus der $\Delta - N$-Aufspaltung kann g_0 zu

$$g_0^{bag} \approx 2.6$$

bestimmt werden [10]. An dieser Stelle möchte ich noch eine theoretische Schätzung von g_0 angeben. Der Übergang zu einem zwei-Schleifen Ausdruck für die Instantondichte $S_{0/1} \rightsquigarrow S_{1/2}$ kann auch erreicht werden, indem ausschießlich S_0 in der folgenden Weise ersetzt wird:

$$(S_0/b)^{6/11} \rightsquigarrow (\ln \frac{1}{\rho\Lambda})^{\alpha} \quad , \quad \alpha = \frac{15}{121}$$

Da α sehr klein ist, ist $(\ln \frac{1}{\rho\Lambda})^{\alpha}$ in einem großen Bereich von $\rho\Lambda$ ungefähr gleich eins. Für

$$g_0^{guess} = 2.7\sqrt{3/N_c}$$

stimmt die zwei-Schleifen Dichte mit der ein-Schleifen Dichte überein. Da die zwei-Schleifen Dichte vermutlich aber keine Verbesserung darstellt, sollte man g_0^{guess} nicht zu ernst nehmen. Zumindest steht g_0^{guess} nicht im Widerspruch zu g_0^{bag}.

Der Wert des Quark-Kondensats ist wohlbekannt $|\langle\bar{\psi}\psi\rangle|^{1/3} = 240\text{MeV}$. Setzt man $N_c = 3$ und nimmt man $g_0 = 2.6$ hin, so erhält man

$$\begin{aligned} p_c \pm \Delta p &= (860 \pm 80)\text{MeV} \\ \rho_c \pm \Delta\rho &= (160 \pm 50)^{-1}\text{MeV} \\ \Lambda_{PV} &\approx 190\text{MeV} \end{aligned} \tag{8.11}$$

Am interessantesten ist, daß das Quark-Kondensat scharf durch Quark-Wellenfunktionen mit relativ großem Impuls p_c dominiert ist. Auf der anderen Seite haben die dominierenden Instantonen einen relativ großen Radius ρ_c, vier mal größer als üblicherweise in Instanton-Flüssigkeits-Modellen angenommen wird. Nichtsdestoweniger ist der vorhergesagte Wert für Λ_{PV} in experimenteller Übereinstimmung, allerdings ist die Unsicherheit durch die grobe Abschätzung von g_0 relativ groß.

8.7 Zusammenfassung

Wann immer man eichabhängige Objekte berechnet oder man eichbrechende Approximationen verwendet, wird man mit dem Problem konfrontiert, eine "gute" Eichung zu wählen. Durch Spezialisieren der allgemeinen Diskussion in Abschnitt 8.2 auf den Fall von Instantonen, kamen wir zu dem Schluß, daß die reguläre Eichung für kleine und die singuläre Eichung für große Abstände angemessen ist. Der eichinvariante Propagator wurde definiert, berechnet und mit dem Propagator in singulärer und regulärer Eichung verglichen (Abbildung B.2). Wir zogen die Schlußfolgerung, daß der eichinvariante Propagator nicht a-priori eine gute Wahl ist, sondern zwischen der regulären und der singulären Eichung liegt.

Durch Verwendung einer geeigneten Eichung gelang es, ein endliches Quark-Kondensat herzuleiten, wobei weder ein Infrarot-Cutoff für den Instantonradius noch ein spezifisches Instantonmodell eingeführt werden mußte. Die lineare Relation zwischen $|\langle\bar{\psi}\psi\rangle|^{1/3}$ und der QCD Skala Λ stimmt mit den experimentellen Daten überein. Das Kondensat wird durch Quark-Felder hohen Impulses $p_c = 860\text{MeV}$ formiert, wobei der beitragende Bereich $\Delta p = 80\text{MeV}$ sehr schmal ist. Die dominierenden Instantonen sind sehr groß ($\rho_c = 160\text{MeV}$).

Kapitel 9

Schlußbetrachtung

9.1 Neue Erkenntnisse

In dieser Arbeit wurden einige bereits bekannte und eine Reihe neuer Resultate gewonnen. Die Berechnungen legten meist das Instanton-Flüssigkeits-Modell zugrunde.

Folgende neue Erkenntnisse wurden gewonnen:

- Im Falle des Quark-Propagators können dynamische Quark-Schleifen in einer renormierten Instanton-Dichte absorbiert werden, welche mit dem Gluon-Kondensat identifiziert werden darf (Kapitel 3).
- Übersichtliche Bethe-Salpeter-Gleichungen wurden für die Quark-4-Punkt-Funktionen aufgestellt und gelöst. Im Flavor-Singulett-Kanal trägt eine Kette von Quark-Schleifen bei, die für das Fehlen eines $U(1)$ Goldstone-Bosons verantwortlich ist (Kapitel 4).
- Aus den Meson-Korrelatoren wurden durch spektralen Angleich die Massen und Kopplungen der σ, ρ, ω, a_1 und f_1 Mesonen bestimmt (Tabelle 5.3, Abbildungen B.3-B.8).
- Die η' Masse wurde erfolgreich vorhergesagt (Gleichung 6.15).
- Die axialen Proton-Formfaktoren des Singulett-Stromes $j_{\mu 5}$, des Gluon-Stromes K_μ und der Anomalie a wurden berechnet und deren Eich(un)abhängigkeit diskutiert (Tabelle 6.1). Es wurde gezeigt, daß $A(0) = -1$ unabhängig von der Zahl der Flavors ist.
- Für kleine Impulse wurden die Geist- und eine eichinvariante Gluon-Masse berechnet (Gleichungen 7.30 und 7.32).
- Allgemeine Regeln zur Wahl einer Eichung wurden aufgestellt, insbesondere wann die reguläre und wann die singuläre Eichung zu verwenden ist (Abschnitte 8.1, 8.2 und 8.3).

- Ein eichinvarianter Quark-Propagator wurde im ein-Instanton-Hintergrund berechnet (Gleichungen 8.6 und 8.8).
- Das Quark-Kondensat wurde mit der QCD-Skala Λ in Beziehung gesetzt, wobei weder ein Infrarot-Cutoff noch ein spezifisches Instanton-Modell eingeführt werden mußte (Gleichung 8.10).

9.2 Ausblick

Das Instanton-Flüssigkeits-Modell hat sich in verschiedensten Sektoren der QCD bewährt, wie die Ergebnisse dieser und anderer Arbeiten zeigen. Obwohl dieses Modell nicht streng aus ersten Prinzipien abgeleitet werden kann, belegt der Erfolg, daß zumindest ein Körnchen Wahrheit in ihm stecken muß. Die Grenzen dieses Modells treten auch klar zutage: Confinement kann nicht erklärt werden und der axiale Singulett-Kanal bereitet weiterhin Probleme, obwohl Instantonen die $U(1)_A$-Symmetrie explizit brechen.

In Zukunft sollten die nicht-Nullmoden berücksichtigt werden, die im Falle von strange Quarks wichtig werden und für die Respektierung der axialen Ward-Identitäten vermutlich essentiell sind. Baryon Korrelatoren zur Bestimmung der Baryon-Massen könnten berechnet werden. Numerisch wurden beide Erweiterungen bereits realisiert [28].

Obwohl eine direkte Berechnung des axialen Singulett-Korrelators nicht zum Ziel führte, konnte mit verfeinerten Argumenten die η' Masse bestimmt werden. Vielleicht löst eine ähnliche Überlegung das Proton-Spin-Problem.

Eichinvariante Gluon-Ball Korrelatoren sollten berechnet werden.

Das dringendste theoretische Problem bleibt ein "Beweis" für die Korrektheit des Instanton-Flüssigkeit-Modells. Dies würde den Gültigkeitsbereich des Modells klar abgrenzen und die allgemeine Akzeptanz steigern.

Die QCD ist eine hartnäckige Theorie. Die Experimental-Physiker vollbringen große Leistungen beim Messen der Hadron-Parameter, wobei die Präzision der Experimente immer größer wird. Der Theoretiker ist gefordert, mit diesem Fortschritt mitzuhalten.

9.3 Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. H. Fritzsch bedanken für die Bereitschaft, einen Quereinsteiger an seinen Lehrstuhl aufzunehmen. Er öffnete mir die Tür zur faszinierenden Teilchenphysik und ermöglichte den Kontakt zu bedeutenden Teilchen-Physikern, insbesondere Herrn Prof. Karliner in Isreal, Prof. S. Veneziano, S. Forte und vielen anderen am CERN. Prof. Dyakonov gilt besonderer Dank für wertvolle Diskussionen und die prompte Bereitschaft Fragen via E-Mail zu beantworten. Meinem Freund Michael Birkel möchte ich für den frischen Wind, den er an das Institut gebracht hat, danken. Lange und anregende Abende am Institut habe ich Dr. A. Blumhofer zu verdanken.

Die Grenze zwischen Physik und Philosophie wurde dabei oft überschritten. Dank gilt auch allen anderen Mitarbeitern am Lehrstuhl für gelegentliche Diskussionen. Meinem Vater, M. Matuschek und D. Holtmannspötter möchte ich für das Korrekturlesen der Dissertation danken. Der 'Deutschen Forschungs-Gemeinschaft' bin ich für die Finanzierung dieser Arbeit sehr zu Dank verpflichtet.

Anhang A

A.1 Notationen

Fast alle auftretenden Faktoren 2π können durch folgende Definitionen absorbiert werden:

$$\delta\!\!\!^{-d}(\cdots) := (2\pi)^d \delta(\cdots) \quad , \quad \int d\!\!\!^{-d}p := \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \quad ,$$

An vielen Stellen wird die Operator-Notation in Dirac-Schreibweise im $\mathbb{R}^4$ verwendet:

$$\langle x|p\rangle = e^{ipx} \quad , \quad \langle x|y\rangle = \delta^4(x-y) \quad , \quad \langle p|q\rangle = \delta\!\!\!^{-4}(p-q)$$

$$\langle x|\psi\rangle = \psi(x) \quad , \quad \langle p|\psi\rangle = \hat{\psi}(p) \quad , \quad \langle p|S|q\rangle = S(p,q)$$

$$\int d\!\!\!^{-4}p\, |p\rangle\langle p| = \mathbb{1} \quad , \quad \int d^4x\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1} \quad ,$$

$$[\hat{p}, X] = i(\partial_\mu X)$$

Diese Notation darf nicht verwechselt werden mit dem Vakuum-Zustand $|0\rangle$ und dem Proton-Zustand $|ps\rangle$ des QCD Hilbert-Raumes und der Mittelung $\langle\cdots\rangle_I$ über Instantonen.

N_c	=	Anzahl der Farben
N_f	=	Anzahl der Quark-Flavors
m	=	Strom-Massen
M	=	Dynamische Massen
tr_D	=	Spur im Dirac-Raum
tr_C	=	Spur im Farb-Raum
Tr	=	Funktional-Spur
Det	=	Funktional-Determinante
$\lambda^a/2$	=	Generatoren der$SU(N_c)$, $a = 1 \ldots N_c^2 - 1$
$\tau^a/2$	=	$\lambda^a/2$ = Generatoren der$SU(2)_c$, $a = 1 \ldots 3$

A.2 Instantonen in singulärer, regulärer und axialer Eichung

Instantonen sind Lösungen der klassischen Euklidischen Yang-Mills Bewegungsgleichungen. Das Instanton am Ursprung in Standard-Orientierung in singulärer, regulärer und axialer Eichung ist gegben durch:

$$\begin{aligned} A_\mu^{sing}(x) &= \eta_{\mu\nu}^{\pm}\frac{x_\nu}{x^2}\frac{\rho^2}{x^2+\rho^2} \quad , \quad \tau_\mu^{\pm}\tau_\nu^{\mp} = \delta_{\mu\nu} + i\eta_{\mu\nu}^{\pm} \\ A_\mu^{reg}(x) &= \eta_{\mu\nu}^{\mp}\frac{x_\nu}{x^2+\rho^2} \quad , \quad \tau_\mu^{\pm} = (\pm i, \tau) \\ A_\mu^{ax}(x) &= R(x)A_\mu^{reg}(x)R^\dagger(x) + iR(x)\partial_\mu R^\dagger(x) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Das obere/untere Vorzeichen steht für ein Instanton/Anti-Instanton ($Q = \pm 1$).

$$R(x) = \pm i\tau_\mu^{\pm}\tilde{x}^\mu(x) \quad , \quad \tilde{x}^\mu(x) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(x) \\ \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\sin\alpha(x) \end{pmatrix}$$

$$\alpha(x) = \frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\rho^2}}\arctan\frac{x_0}{\sqrt{\mathbf{x}^2+\rho^2}}$$

Die kovariante Ableitung $\not{D}$ besitzt eine Nullmode

$$i\not{D}\psi = (i\not{\partial} - \not{A})\psi = 0$$

wobei die Nullmode die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} \psi_{sing}(x) &= \sqrt{2}\varphi(x)\frac{\not{x}}{|x|}\chi \\ \psi_{reg}(x) &= \sqrt{2}\varphi(x)\chi \quad , \quad \varphi(x) = \frac{\rho}{\pi(x^2+\rho^2)^{3/2}} \\ \psi_{ax}(x) &= \sqrt{2}\varphi(x)R(x)\chi \end{aligned} \tag{A.2}$$

χ ist ein Farb- & Dirac-Spinor, gegeben durch

$$\chi^{\pm}\bar{\chi}^{\pm} = \frac{1}{16}\gamma_\mu\gamma_\nu\frac{1\pm\gamma_5}{2}\tau_\mu^{\mp}\tau_\nu^{\pm} \quad .$$

Für leichte Quarks ist der Propagator durch die Nullmode dominiert. Gemittelt über die Instanton-Orientierung, -Ort und -Ladung ist der Propagator diagonal im Impulsraum und durch

$$\langle\psi(p)\psi^\dagger(p)\rangle = \frac{1}{2N_c}\varphi^2(p)$$

gegben, wobei

$$\begin{aligned} \psi_{sing}(p) &= \sqrt{2}\varphi_{sing}(p)\frac{\not{p}}{|p|}\chi \quad , \quad \varphi_{sing}(p) = \pi\rho^2\frac{d}{dz}[I_1(z)K_1(z) - I_0(z)K_0(z)]_{z=p\rho/2} \\ \psi_{reg}(p) &= \sqrt{2}\varphi(p)\chi \quad , \quad \varphi_{reg}(p) = \frac{4\pi\rho}{p}e^{-p\rho} \\ \psi_{ax}(p) &= FT\{\psi_{ax}\}(p) \quad , \quad \varphi_{ax}(p) = \frac{8}{p\rho}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\pi r}{2\sqrt{r^2+\rho^2}}\right)\sin(pr)r\,dr \end{aligned} \tag{A.3}$$

$I_\nu(z)$ und $K_\nu(z)$ sind modifizierte Besselfunktionen. Das asymptotische Verhalten ist in folgender Tabelle zusammengestellt.

$p\varphi(p)/\rho$	singulär	regulär	axial
$p\rho \ll 1$	2π	4π	π^2
$p\rho \gg 1$	$\frac{12\pi}{(p\rho)^3}$	$4\pi\, e^{-p\rho}$	$\sim e^{-p\rho}$

Tabelle A.1: *Asymptotik von* $p\varphi(p)/\rho$

Im Instanton-Flüssigkeits-Modell ist die Konstituenten-Masse eines Quarks

$$M_\rho(p) \sim p^2\varphi^2(p) \quad .$$

$M_\rho(p)$ ist in Abbildung B.2 in allen drei Eichungen geplottet.

A.3 Mittelung über die Instanton-Parameter γ_I

Das Instanton in allgemeiner Lage und Orientierung und die zugehörige Dirac-Nullmode haben die Form

$$\begin{aligned} A_{I\mu}(x) &= O_I^{ab} A_\mu^b(x - z_I) \\ \psi_I(x) &= U_I \psi(x - z_I) \quad , \quad \chi_I := U_I \chi \quad , \quad \frac{1}{2}\mathrm{tr}(U\lambda^a U^\dagger \lambda^b) = O^{ab} \\ \gamma_I = (z_I, O_I, \rho_I, Q_I) &= (\text{Ort, Orientierung, Radius, toplogische Ladung}) \end{aligned}$$

A_μ^b ist ein Instanton am Ursprung in Standardorientierung mit Radius $\rho = \rho_I$ und Ladung $Q_I = \pm 1$ und ψ die zugehöige Nullmode, gegeben in Anhang A.2. $U_I \in SU(N_c)$ und $O_I \in Ad[SU(N_c)]$ sind Orientierungsmatrizen in fundamentaler bzw. adjungierter Darstellung.

An verschiedenen Stellen muß über die kollektiven Koordinaten γ_I gemittelt werden:

$$\langle \ldots \rangle_I \;=\; \int d\gamma_I \, D(\rho_I) \ldots \;=\; \frac{1}{2} \sum_{Q_I = \pm 1} \int d^4 z_I dO_I d\rho_I \, D(\rho_I) \ldots \tag{A.4}$$

Folgende Modellannahme für D definiert das Instanton-Flüssigkeits-Modell:

$$D(\rho_I) = n\delta(\rho_I - \rho) \quad , \quad n = (200 \text{ MeV})^4 \quad , \quad \rho = 600 \text{ MeV}^{-1} \quad . \tag{A.5}$$

Die wichtigsten Formeln für das Haar-Maß $\int dO_I$ und $\int dU_I$ lauten:

$$\int dO \; 1 = 1 \quad , \quad \int dO \; O^{ab} O^{cd} = \frac{1}{N_c^2 - 1} \delta^{ac} \delta^{bd} \tag{A.6}$$

$$\int dU \; 1 = 1 \quad , \quad \int dU \; U_k^i U_l^{\dagger j} = \frac{1}{N_c} \delta_l^i \delta_k^j$$

Integrale über eine ungerade Anzahl von Matrizen sind Null. Folgende Formeln sind noch nützlich

$$N_C \langle \chi_I^{\pm} \bar{\chi}_I^{\pm} \rangle_I = \mathrm{tr}_C \chi_I^{\pm} \bar{\chi}_I^{\pm} = \frac{1}{2}(\frac{1 \pm \gamma_5}{2}) \tag{A.7}$$

wobei die Mittelung über Q_I noch nicht ausgeführt wurde.

$$\bar{\chi}\chi = \mathrm{tr}_{CD} \chi \bar{\chi} = 1 \tag{A.8}$$

Aufsammeln der Raum-, Farb- und Dirac-Terme ergibt

$$\psi_I^{\dagger}(p)\psi_I(p) = 2\varphi^2(p) \quad , \quad \int \bar{d}^4 p \, \psi_I^{\dagger}(p)\psi_I(p) = 1 \tag{A.9}$$

A.4 Numerische Auswertung der Fourier- Transformation

Die Integral-Ausdrücke der Meson-Korrelatoren müssen numerisch berechnet werden. Zwei Arten von Operationen werden durchgeführt:

1. Faltung Lorentz-kovarianter Funktionen ($F_{0/5}, \Gamma_\Gamma$)
2. Fourier-Transformation (FT) der Korrelatoren in die Ortsdarstellung

Die d-dimensionale FT ist wie folgt definiert:

$$\hat{f}_{\mu_1 \ldots \mu_n}(x) = F_d\{f_{\mu_1 \ldots \mu_n}\}(x) = \int \bar{d}^d p \, e^{-ipx} f_{\mu_1 \ldots \mu_n}(p) \tag{A.10}$$

Für eine skalare sphärisch symmetrische Funktion $f = f(|p|)$ reduziert sich die FT auf ein ein-dimensionales Integral

$$F_d\{f(|p|)\}(x) = \int_0^\infty \left(\frac{m}{2\pi|x|}\right)^{d/2} f(m) J_{d/2-1}(m|x|)|x| \, dm \tag{A.11}$$

wobei J_ν Bessel-Funktionen sind.

Falls x nicht zu groß ist und F genügend rasch abfällt, kann die Integration mit Gaußschen (oder anderen) Integrationsmethoden erfolgen. Falls f zu langsam abfällt, muß man das asymptotische Verhalten subtrahieren, um die Konvergenz von f zu beschleunigen. Die FT des asymptotischen Anteils kann analytisch durchgeführt werden und muß zur numerischen FT der reduzierten Funktion wieder hinzugefügt werden.

Die FT einer allgemeinen Lorentz-kovarianten Funktion kann auch auf (A.11) zurückgeführt werden mit einer (formal) größeren Dimension d:

$$\begin{aligned} F_d\{p_\mu f(|p|)\}(x) &= 2\pi i x_\mu F_{d+2}\{f\}(x) \qquad (A.12) \\ F_d\{p_\mu p_\nu f(|p|)\}(x) &= \frac{1}{d-1}\Big[(\delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}) F_d\{p^2 f(|p|)\}(x) - \\ &\quad (\delta_{\mu\nu} - d\frac{x_\mu x_\nu}{x^2})(4\pi F_{d+2}\{f\}(x) - 4\pi^2 x^2 F_{d+4}\{f\}(x))\Big] \\ &\ldots \end{aligned}$$

A.5 Numerische Auswertung der Faltungen

Das Faltungsintegral ist definiert durch

$$f*g(p) = \int \bar{d}^d q\, f(q)\cdot g(p-q) \tag{A.13}$$

Integrale dieses Typs können auf FT (↑Anhang A.4) reduziert werden:

$$f*g(p) = F_d^{-1}\{F_d\{f\}\cdot F_d\{g\}\} \tag{A.14}$$

Dies ist eine schnelle und einfache Methode, Faltungsintegrale zu berechnen. Für die unverbundenen Teile der Korrelatoren hat sie außerdem den Vorteil, daß die Rücktransformation F_d^{-1} in Ortsdarstellung nicht benötigt wird. Der Nachteil dieses Verfahrens liegt darin, daß die FT eine Integration über oszillierende Integranden bedeutet, was numerisch problematisch ist. Wird die Rücktransformation F_d^{-1}, wie im Falle von $F_{0/5}$ und Γ_Γ benötigt, ist es besser die Faltung direkt auszuführen. Ähnlich wie im Falle der FT können die Faltungsintegrale auf den skalaren Fall reduziert werden. Die Faltung zweier skalarer Funktionen kann weiter auf ein zwei-dimensionales Integral reduziert werden:

$$f*g(p) = \frac{(d/2-1)!}{2\pi^{d/2+1}(d-2)!}\int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta\, f(r)g(\sqrt{p^2-2|p|r\cos\theta+r^2})(r\sin\theta)^{d-2}r \tag{A.15}$$

Dieses kann wiederum mit Gaußschen Integrations-Methoden ausgewertet werden. Der zweite Vorteil ist, daß es keine Probleme mit langsam abfallenden Funktionen gibt. Manchmal gibt es große Auslöschungen zwischen verschiedenen Termen. In diesem Fall ist es wichtig, nicht-adaptive Integrations-Methoden zu verwenden, da diese zu keinem Genauigkeitsverlust führen.

Die explizite Reduktion der verschiedenen Korrelatoren auf die Standardformen (A.11) und (A.15) ist mehr oder weniger trivial. Die Selbstkonsistenz-Gleichung wurde iterativ gelöst. Die Ergebnisse sind in Abbildung B.3 - B.8 dargestellt.

Anhang B

Abbildungen

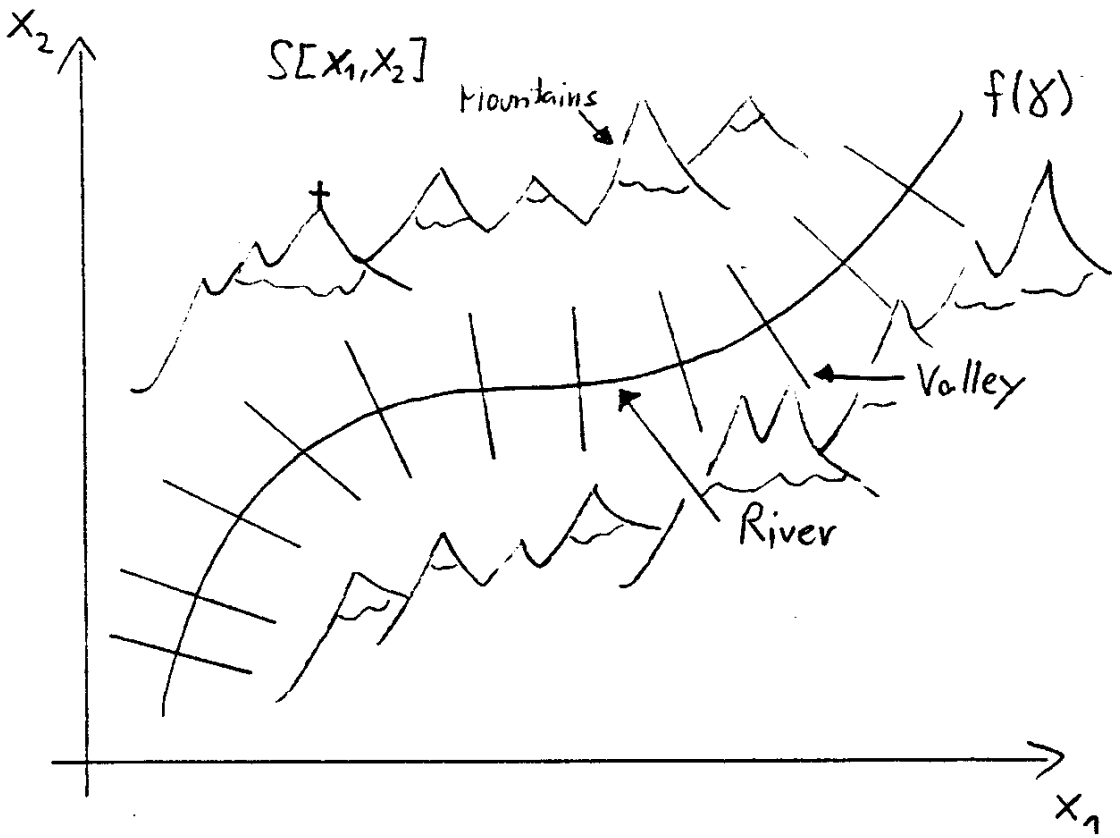


Abbildung B.1: *S ist minimal am Fluß, klein im Tal und groß in den Bergen, Folglich ist* $Z = \int dx_1 dx_2\, e^{-S[x_1,x_2]}$ *durch das Tal dominiert.*

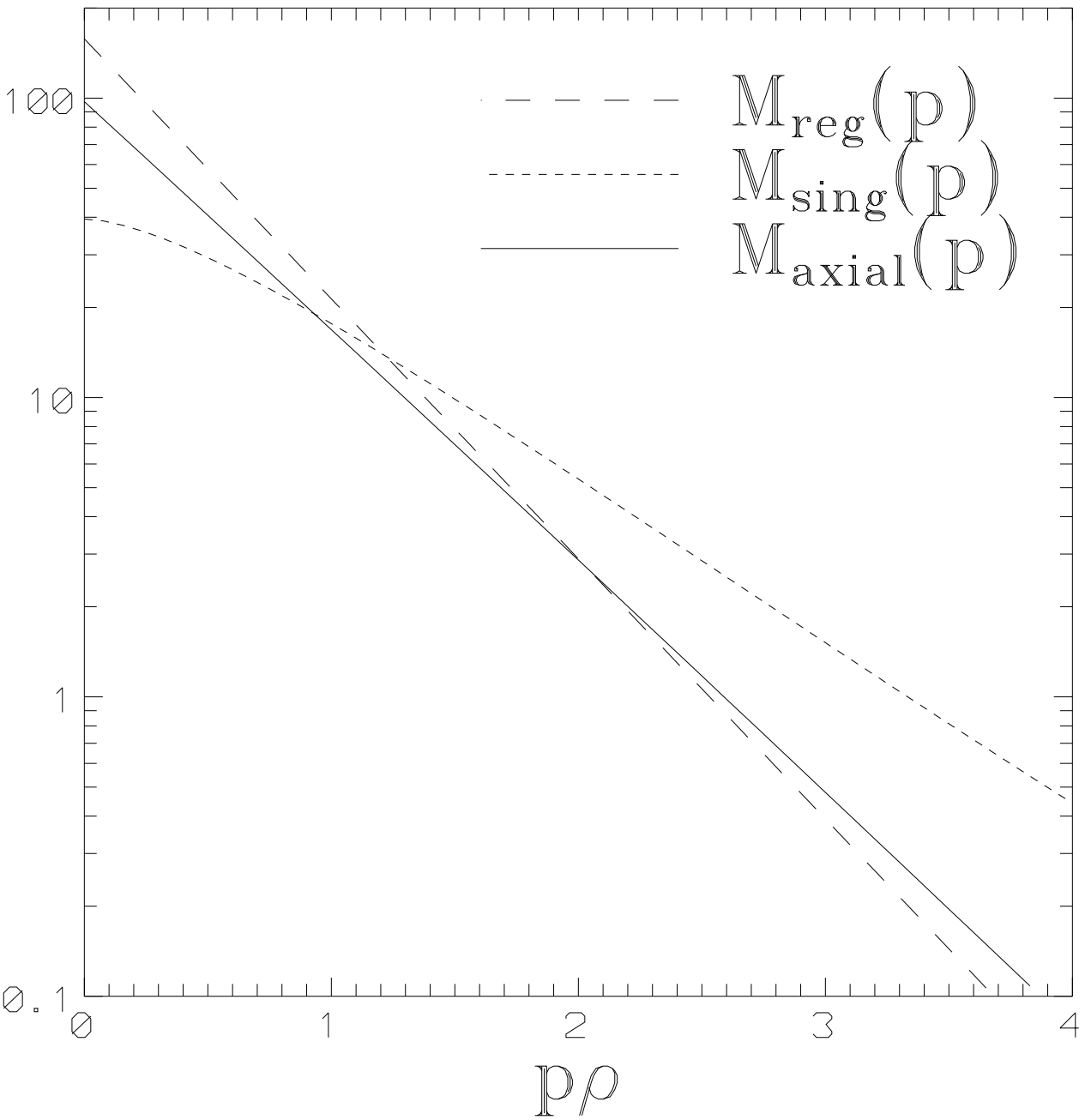


Abbildung B.2: *Die Konstituenten-Quarkmasse $M_\rho(p) \sim p^2\varphi^2(p)$ in singulärer, regulärer und axialer Eichung für festen Instanton-Radius ρ in willkürlicher Normierung. Für gegebenen Impuls kann man die jeweils niedrigste Kurve als die "physikalischste" ansehen.*

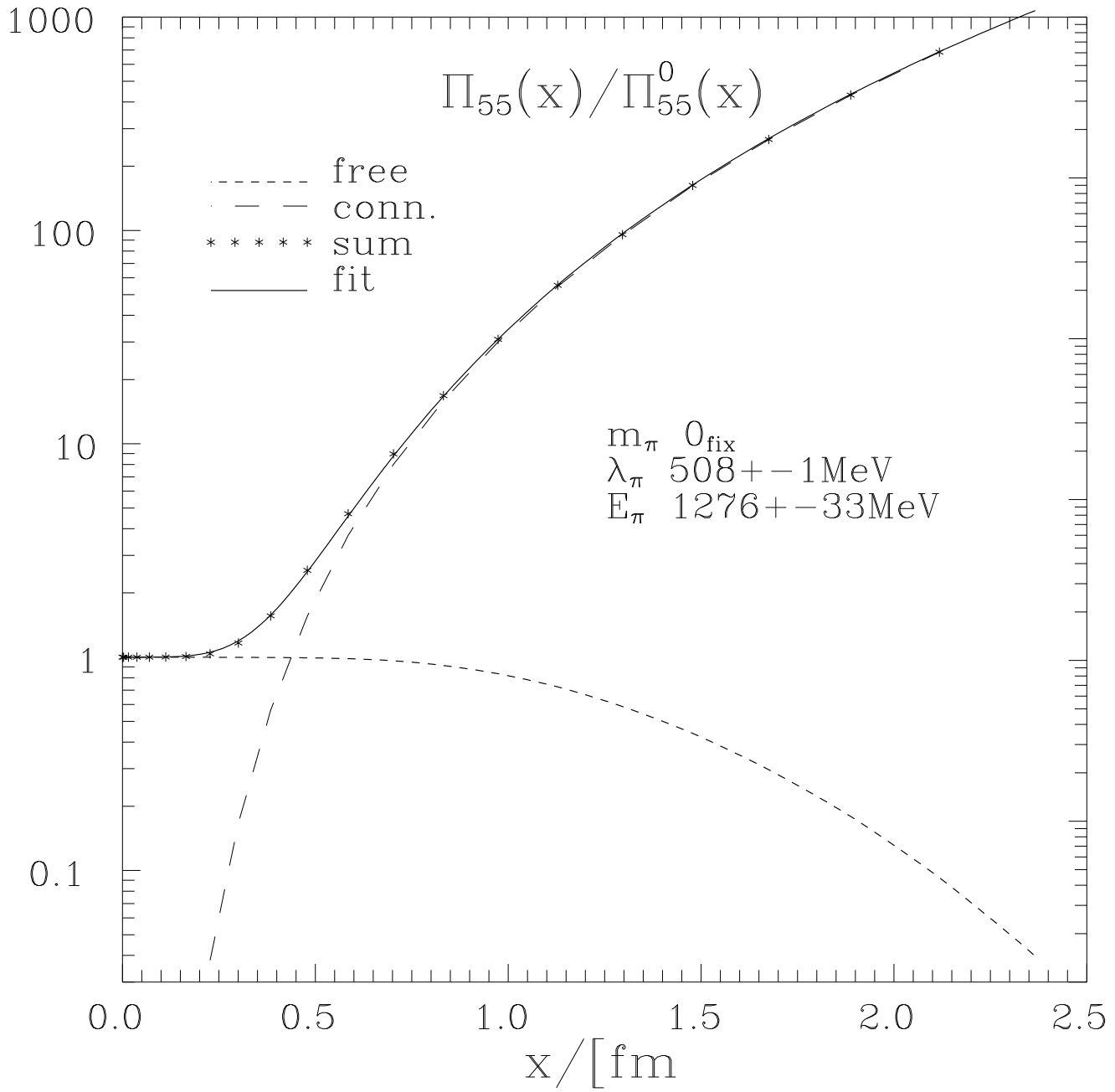


Abbildung B.3: *Pseudoskalarer Triplett-Korrelator, normiert auf den freien Korrelator masseloser Quarks. Die Pion-Kopplungs-Konstante λ_π und die Kontinuum-Schwelle E_π sind angepaßt, so daß der spektrale Ansatz mit der theoretischen Summe aus freiem und verbundenem Korrelator übereinstimmt.*

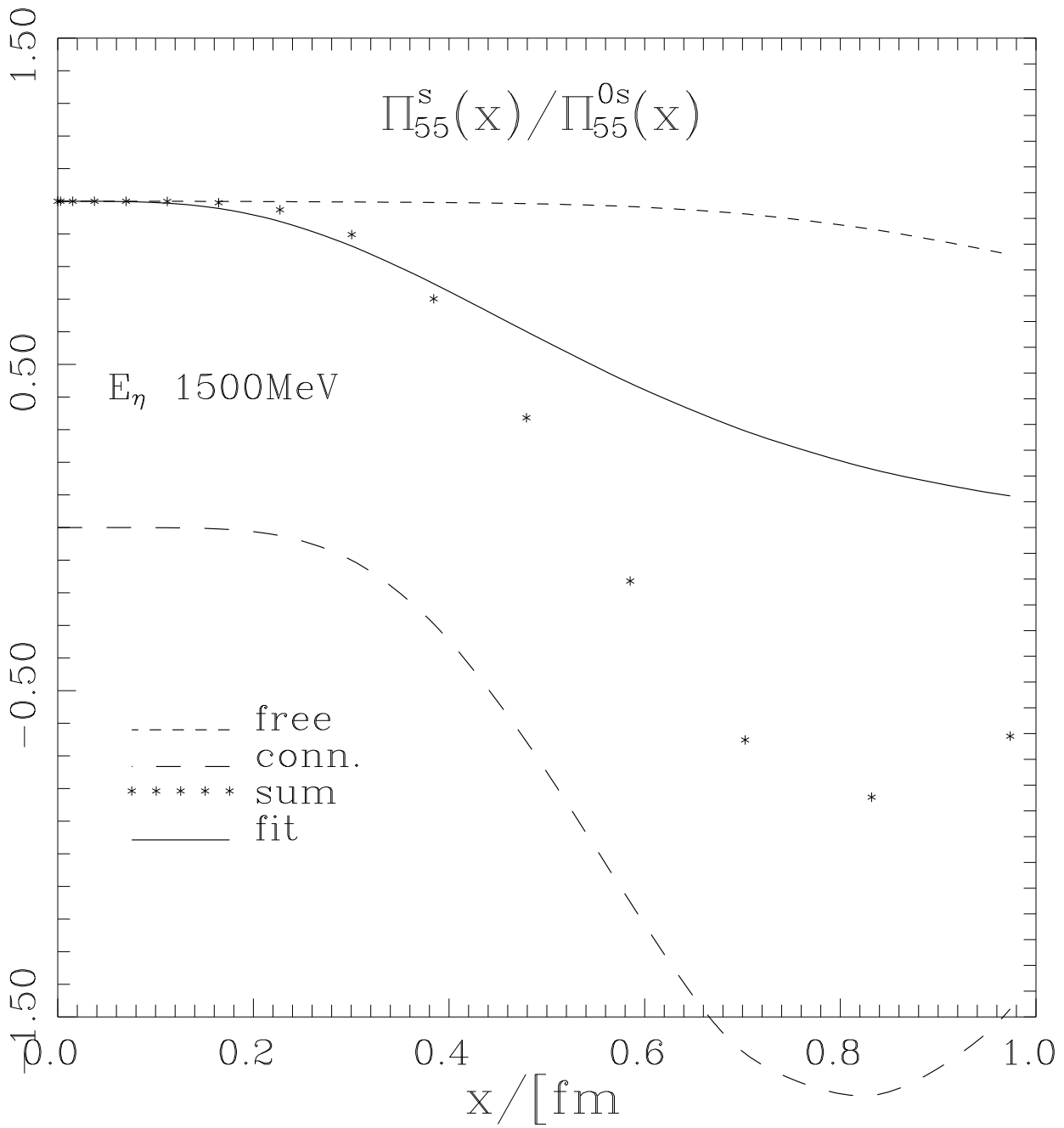


Abbildung B.4: *Pseudoskalarer Singulett-Korrelator, normiert auf den freien Korrelator masseloser Quarks. In diesem Kanal gibt es eine starke Abstoßung, die keinen Bindungszustand zuläßt. Die theoretische Kurve ist mit einer Kurve verglichen, die sich aus einem reinen Kontinuum-Spektrum oberhalb $E_{\eta'}$ ergibt.*

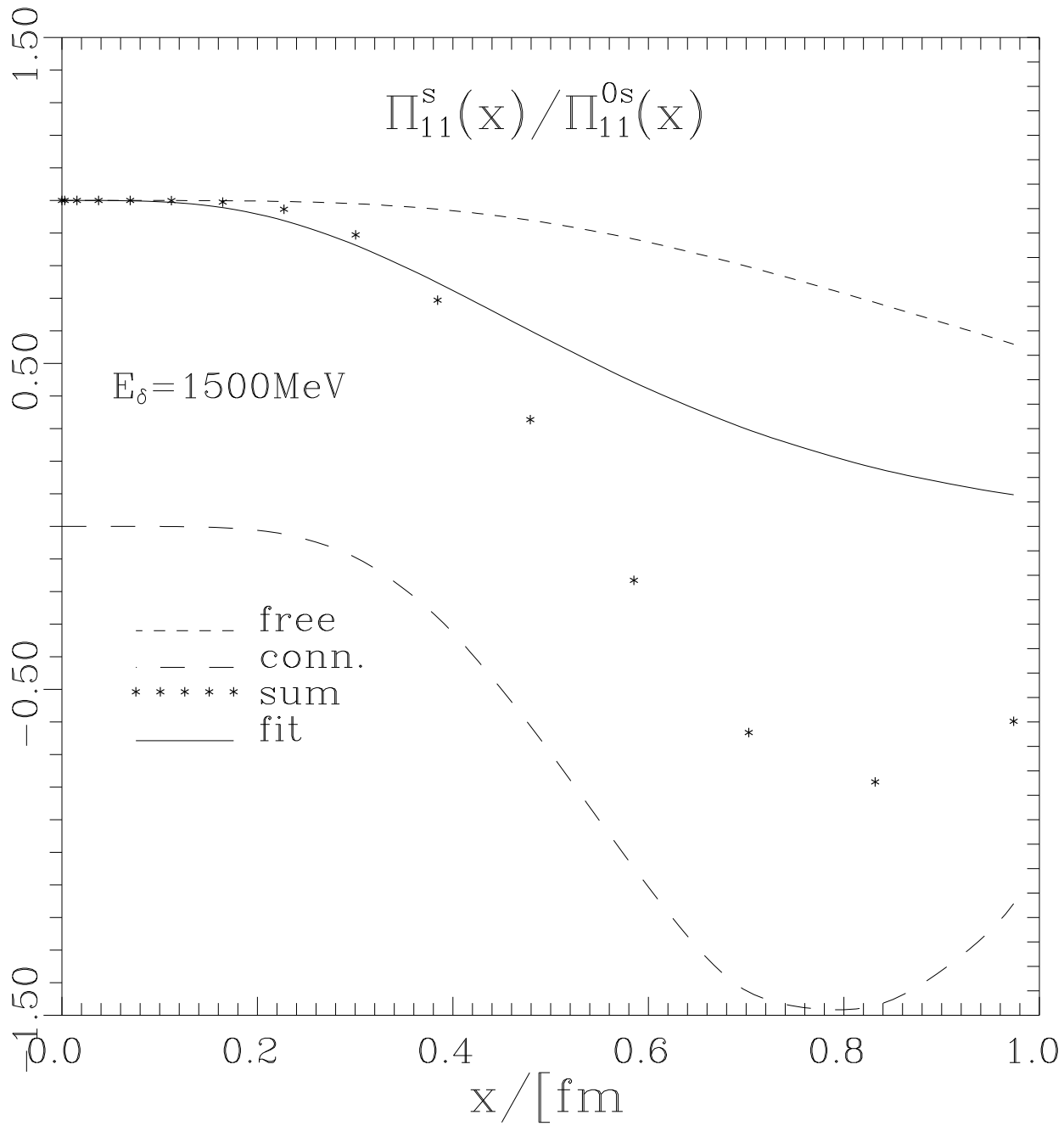


Abbildung B.5: *Skalarer Triplett-Korrelator, normiert auf den freien Korrelator masseloser Quarks. In diesem Kanal gibt es eine starke Abstoßung, die keinen Bindungszustand zuläßt. Die theoretische Kurve ist mit einer Kurve verglichen, die sich aus einem reinen Kontinuum-Spektrum oberhalb E_δ ergibt.*

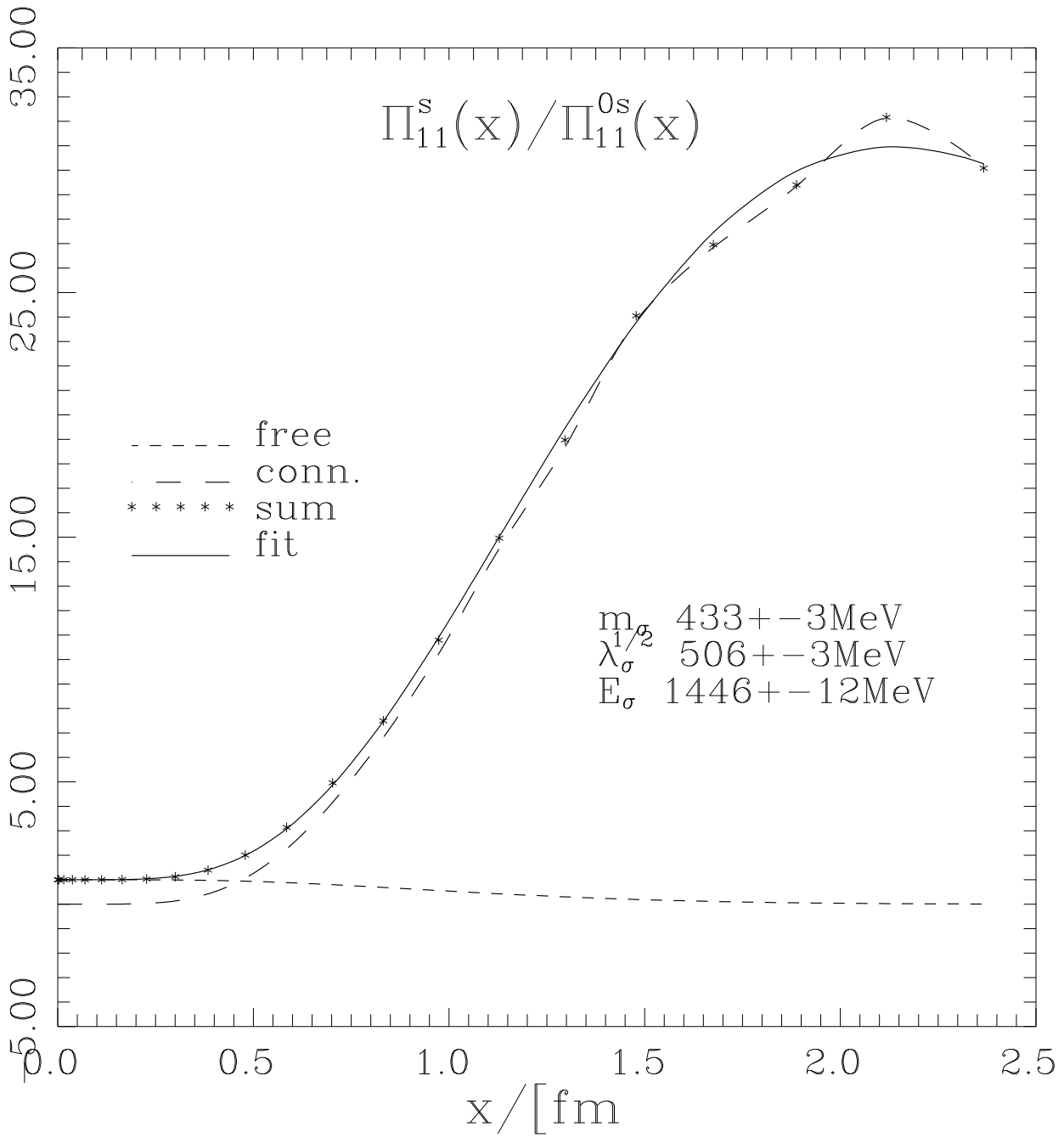


Abbildung B.6: *Skalarer Singulett-Korrelator, normiert auf den freien Korrelator masseloser Quarks. Die σ Masse m_σ und Kopplung λ_σ und die Kontinuums-Schwelle E_σ wurden aus einem spektralen Fit gewonnen.*

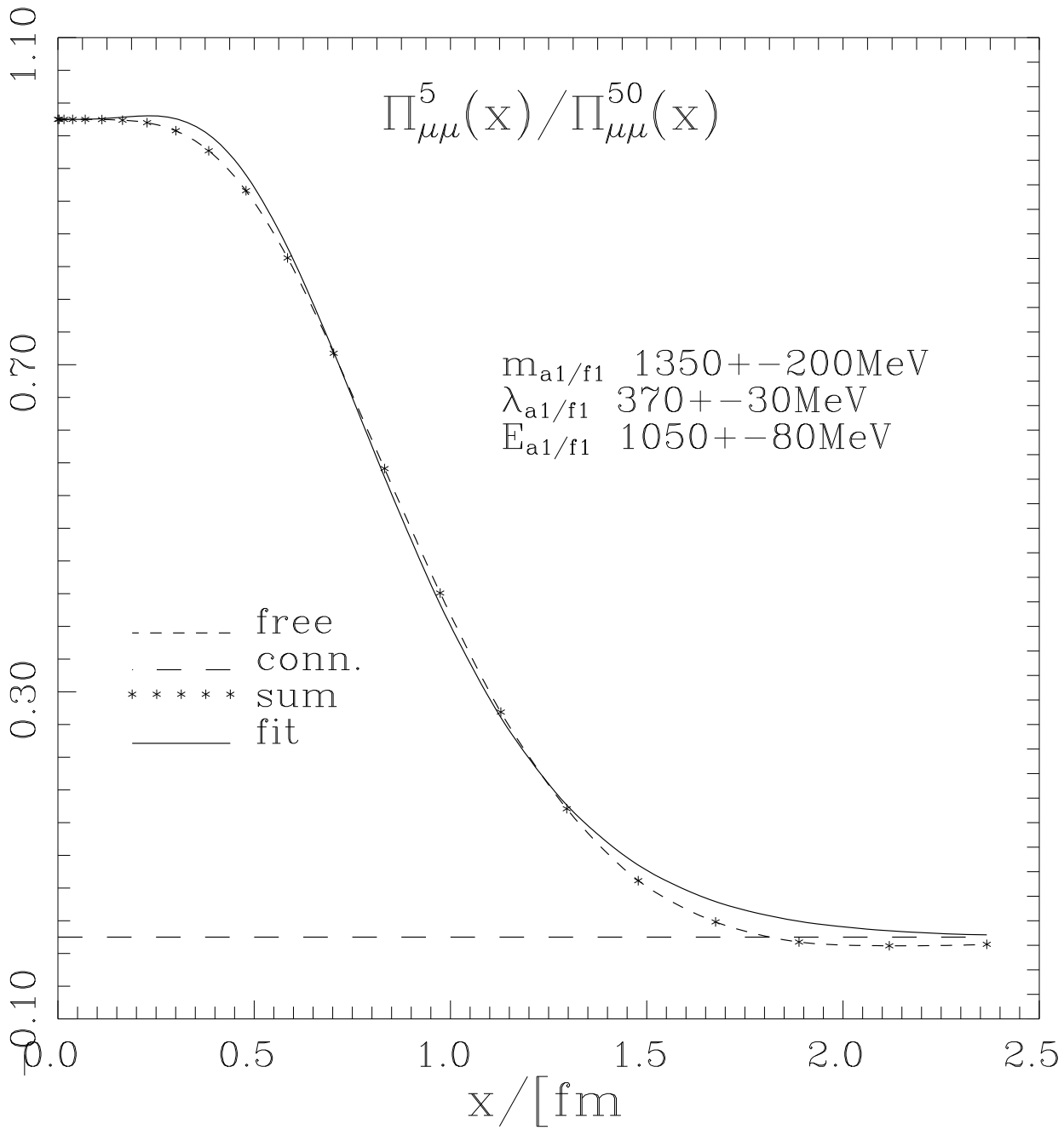


Abbildung B.7: *Axialvektor-Korrelator normiert auf den freien Korrelator masseloser Quarks. Triplett- und Singulett-Korrelator sind gleich, da der verbundene Teil vernachlässigt wurde. Die a_1 und f_1 Masse, Kopplung und Kontinuum-Schwelle wurden aus einem spektralen Fit gewonnen.*

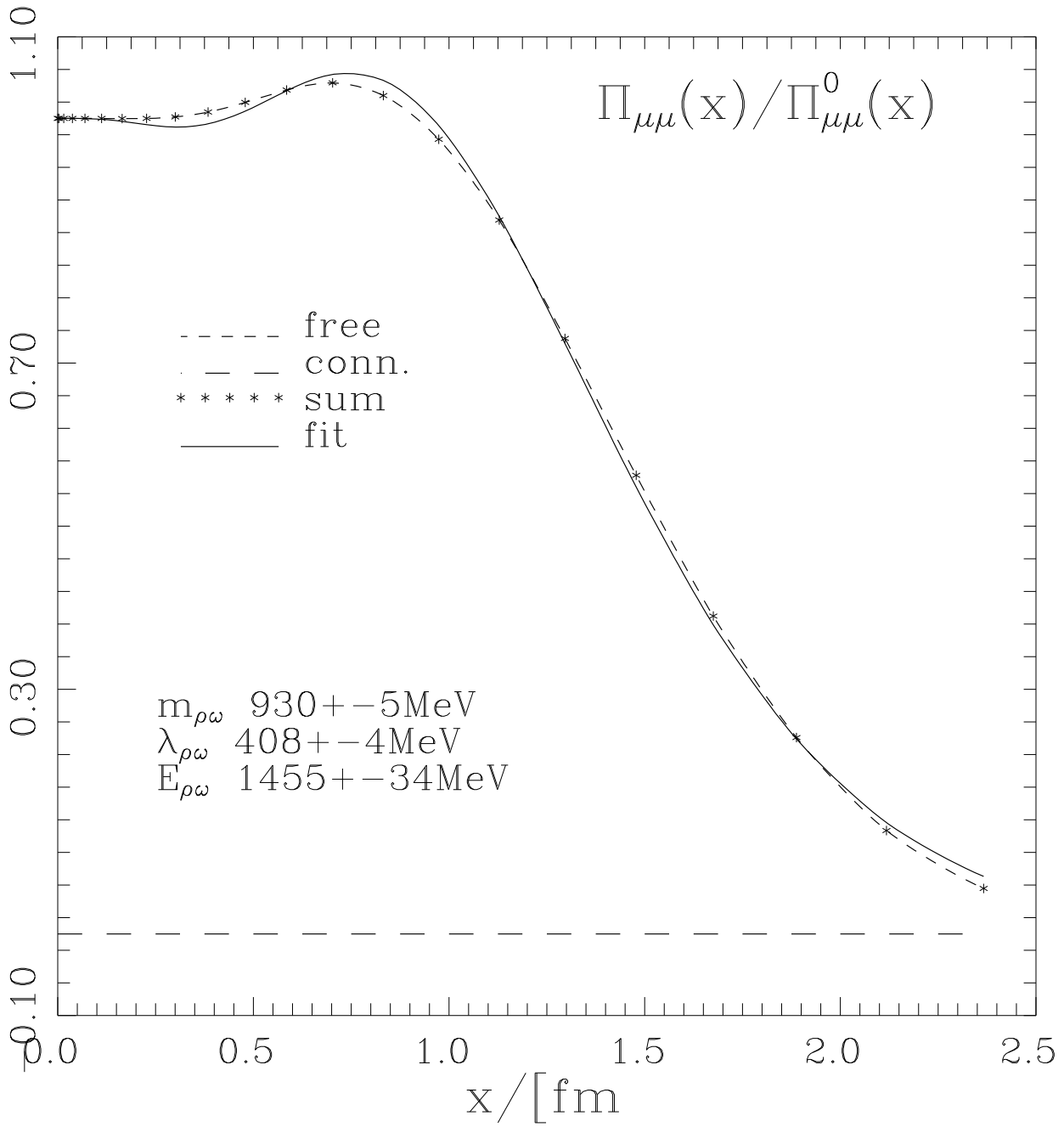


Abbildung B.8: *Vektor-Korrelator, normiert auf den freien Korrelator masseloser Quarks. Triplett- und Singulett-Korrelator sind gleich, da der verbundene Teil Null ist. Die ρ und ω Masse, Kopplung und Kontinuum-Schwelle wurden aus einem spektralen Fit gewonnen.*

Literaturverzeichnis

[1]

Allgemeine Literatur

[2] J. Glimm, A. Jaffe: *Quantum physics*; *New York, Springer (1981)*

[3] H. Lehman et al.: *"LSZ theory"*; *Nuovo Cim. 1 (1955) 205*

[4] J.C. Ward: *Phys.Rev. 78 (1950) 182*

[5] C.G. Callen: *Broken scale invariance in scalar field theory*; *Phys.Rev. D2 (1970) 1541*

[6] K. Symanzik: *Small distance behaviour in field theory and power counting*; *Comm.Math.Phys. 18 (1970) 227*

[7] W. Zimmermann: *Composite operators, normal products and the short distance expansion in the perturbation theory of renormalizable interactions*; *Ann.of Phys. 77 (1973) 536,570*

[8] R.P. Feynman: *Quantum mechanics and path integrals*; *Rev.Mod.Phys. 20 (1948) 367*

[9] M. Creutz: *Quarks, gluons and lattices*; *Cambridge Univ. Press (1983)*

[10] F.E. Close: *An introduction to quarks and partons*; *Academic Press (London) (1979)*

Instantonen: Einführungen

[11] R. Rajaraman: *Solitons and instantons*; *North-Holland (1982)*

[12] J. Zinn-Justin: *The principles of instanton calculus*; *Les Houches (1984)*

[13] M.A. Shifman et al.: *ABC of instantons*; *Fortschr.Phys. 32,11 (1984) 585*

[14] G. Callen, R. Dashen, D. Gross: *Toward a theory of strong interactions*; *Phys.Rev. D17 (1978) 2717 A theory of hadronic structure*; *Phys.Rev. D19 (1979) 1826*

Instantonen: Allgemeine Formeln

[15] A.A. Belavin et al.: *"Instantons in Yang-Mills-Theory"*; *Phys.Lett. B59 (1975) 85*

[16] A. Actor: *Classical solutions of SU(2) Yang-Mills theories*; *Rev.Mod.Phys. 51 (1979) 461*

[17] G. 't Hooft: *Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle*; *Phys.Rev. D14 (1976) 3432*
C. Bernard: *Gauge zero modes, instanton determinants, and QCD calculations*; *Phys.Rev. D19 (1979) 3013*

[18] L.S. Brown et al.: *Propagation functions in pseudoparticle fields*; *Phys.Rev. D17 (1978) 1583*; *Massive propagators in instanton fields*; *Phys.Rev. D18 (1978) 2180*

[19] R.D. Carlitz: *Bound states from instantons*; *Phys.Rev. D17 (1978) 3225*

[20] J.M.M. Verbaarschot: *Streamlines and conformal invariance in Yang-Mills theories*; *Nucl.Phys. B362 (1991) 33*
[21] M.A. Shifman et al.: *Instanton density in a theory with massless quarks*; *Nucl.Phys. B163 (1980) 46* ; *Nucl.Phys. B191 (1981) 301*
[22] B.V. Geshkeinbein, B.L. Ioffe: *The role of instantons in generation of mesonic mass spectrum*; *Nucl.Phys. B166 (1980) 340*
[23] M. Hutter *Gauge invariant quark propagator in the instanton background*; *HEP-PH 9502361, submitted to Nucl. Phys.*

Instantonen: Das Flüssigkeits-Modell
[24] E. Ilgenfritz et al.: *Hard-core Model*; *Nucl.Phys. B184 (1981) 443*
[25] D.I. Dyakonov, V.Yu. Petrov: *Instanton-based vacuum from the feynman variational principle*; *Nucl.Phys. B245 (1984) 259*; *A theory of light quarks in the instanton vacuum*; *B272 (1985B) 457*
[26] M. Hutter *Instantons in QCD and meson correlation functions* München *preprint HEP 95-01, Submitted to Zeitschr.Phys.*

Instantonen: Numerische Studien
[27] E.V. Shuryak: *The role of instantons in QCD (A1-A4)*; *Nucl.Phys B203 (1982) 93,116,140; B214 (1982) 237 Toward the quantitative theory of the instanton liquid (B1-B4)*; *Nucl.Phys B302 (1988) 559,574,599,621 Instantons in QCD (C1-C4)*; *Nucl.Phys B319 (1989) 521,541; B328 (1989) 85,102*
[28] E.V. Shuryak, J.J.M. Verbaarschot: *Quark propagation in the random instanton vacuum*; *Nucl.Phys. B410 (1993) 37 Mesonic correlation functions in the random instanton vacuum*; *Nucl.Phys. B410 (1993) 55 Baryonic correlators in the random instanton vacuum*; *Nucl.Phys. B412 (1994) 143*
[29] T. Schaefer, E.V. Shuryak: *Hadronic wave functions in the instanton liquid model*; *Phys.Rev. D50 (1994) 478*

Gluon-Masse
[30] L. Scott: *Nucl. Phys. B157 (1979) 392*
[31] J.M. Cornwall: *Phys.Rev. D10 (1974) 500*
[32] K. Lane: *Phys.Rev. D10 (1974) 2605*
[33] H. Pagels: *Phys.Rev. D19 (1979) 3080*
[34] N. Bralic: *Phys.Rev. D22 (1980) 3090*
[35] P. Fishbane et al.: *Phys.Rev. D24 (1981) 2324*
[36] C.G. Callen et al.: *Phys.Lett. B66 (1977) 375*
[37] J. Ambjorn et al.: *Nucl.Phys. B152 (1979) 75, B170 (1980) 60,265*
[38] J.M. Cornwall: *Phys.Rev. D26 (1982) 1453*
[39] F. Halzen: *Relating the QCD pomeron to an effective gluon mass*; *preprint MAD/PH/702 (1992)*
[40] M. Hutter: *Gluon mass from instantons*; *preprint LMU-Muenchen HEP 93/18 (1993)*

Axiale Anomalie, η' Masse und Proton-Spin

[41] J.S. Bell, R. Jackiw; *"Axial anomaly"*: *Nuovo.Cim. A51 (1969) 47*
S.L. Adler, W.A. Bardeen: *"Axial anomaly"*: *Phys.Rev. 182 (1969) 1517*
[42] J. Kogut, L. Susskind: *How quark confinement solves the $\eta \to 3\pi$ problem*; *Phys.Rev. D11 (1975) 3594*
[43] E. Witten: *Current algebra theorems for the U(1) "Goldstone boson" Nucl.Phys. B156 (1979) 269*
[44] B. Ioffe: *On the choice of quark currents in QCD sum rules for baryon masses*; *Z.Phys C18 (1983) 67*
[45] S.D. Baas, A.W. Thomas: *The EMC spin effect*; *Cavendish preprint HEP 92/5 (1992)*
[46] E. Reya: *Polarized structure functions and the spin of the proton*; *Dortmund preprint DO-TH 93/09*
[47] R.G. Roberts: *The structure of the proton*; *Cambridge (1990)*
[48] E.M. Collaboration: *An investigation of the spin structure of the proton in deep inelastic scattering of polarised muons on polarised protons*; *Nucl.Phys. B328 (1989) 1*
[49] S.M. Collaboration: *Measurement of the spin dpendent structure function $g_1(p)$ of the proton*; *CERN-PRE 94 (1994)*
[50] L.M. Sehgal: *"neutron β-decay"*; *Phys.Rev. D10 (1974) 1663*
[51] M. Bourquin et al.: *"octet hyperon β-decay"*; *Z.Phys. C21 (1983) 26*
J. Stern, G. Clement; *Phys. Lett. B231 (1989) 471*
[52] J. Ellis, M. Karliner: *Phys.Lett. B213 (1988) 73*
[53] S. Forte, E.V. Shuryak: *Instanton-induced supression of the singlet axial charge of the proton*; *Nucl.Phys. B357 (1991) 153*
[54] R.L. Jaffe: *The g_1 problem: Deep inelastic scattering and the spin of the proton*; *Phys.Lett. B193 (1987) 101*
[55] H. Fritzsch: *The spin density functions of the nucleon*; *Phys.Lett. B242 (1990) 451*
QCD anomaly and the spins inside the quarks; *Phys.Lett. B256 (1991) 75*

Operator-Produkt-Entwicklung

[56] Narison: *QCD spectral sum rules*; *World scientific 1989*
[57] M.A. Shifman et al.: *QCD and resonance physics*; *Nucl.Phys. B147 (1979) 385, 448,519*
[58] V.A. Novikov et al.: *Calculation in external fields in QCD; technical review*; *Fort.Phys. 32 (1984) 585*; *Wilson's OPE: can it fail ?*; *Nucl.Phys. B249 (1985) 445*

Verschiedenes

[59] S.V. Shabanov: *Lectures on quantization of gauge theories by the path intagral method*; *Corfu School Proceedings 1992*
[60] Schrieffer: *Theory of superconductivity*; *Benjamin (1964)*
[61] D.J. Gross, F. Wilczek: *"Asymptotic freedom"*; *Phys.Rev.Lett 30 (1973) 1343*
H.D. Politzer: *"Asymptotic freedom"*; *Phys.Rev.Lett 30 (1973) 1346*
[62] E. Witten: *$1/N_c$ expansion in QCD*; *Nucl.Phys. B160 (1979) 57*
[63] S. Weinberg: *Das $U(1)$ Problem Phys.Rev. D11 (1975) 3583*
[64] M.A. Shifman: *Anomalies in gauge theories*; *Phys.Rep. 209 (1991) 341*

[65] A.V. Smilga: *Vakuum fields in the schwinger model*; *Phys.Rev. D46 (1992) 5598*
H. Leutwyler, A.V. Smilga: *Spectrum of Dirac operator and role of winding number in QCD*; *Phys.Rev. D46 (1992) 5607*
[66] E.V. Shuryak: *Correlation functions in the QCD vacuum Rev.Mod.Phys. 65 (1993) 1*
[67] K.G. Wilson: *Confinement of quarks*; *Phys.Rev. D10 (1974) 2445*
[68] J. Gasser, H. Leutwyler: *Quark masses*; *Phys.Rep. 87 (1982) 77*
[69] A.E. Dorokhov et al.: *Proton spin within nonperturbative QCD*; *Int.J.Mod.Phys. A8 (1993) 603*

Lebenslauf

Personalien

Name:	Marcus Hutter
Adresse:	Josephsburgstr. 59 D-81673 München
Geboren:	14.April 1967 in München

Schulausbildung

Sep.1973 - Jul.1977	Grundschule in München und USA
Sep.1977 - Mai.1987	Gymnasium in München und in Markt Schwaben Leistunskurse: Mathematik & Physik
20.Mai.1987	Abitur

Studium Informatik

Nov.1987 - Mai.1992	Informatik mit Nebenfach Mathematik an der Technischen Universität München, Spezialgebiet: Künstliche Intelligenz, Neuronale Netze, Genetische Algorithmen
Diplomarbeitsthema:	Implementierung eines Klassifizierungssystems
26.Mai.1992	Diplom

Studium und Promotion in Physik

Nov.1989 - Jul.1993	Allgemeine Physik an der Technischen Universität München
Nov.1992 - Jan.1996	Dissertation in theoretischer Elementarteilchenphysik bei Prof. H. Fritzsch. Thema: Instantonen in der QCD